MODELAGEM DO PROBLEMA RESTRITO DOS TRÊS CORPOS: UMA ABORDAGEM NUMÉRICA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Tales de Paula Carvalho[1]
Ronan Pereira da Silva[2], Hugo Leonardo Couto Carvalhaes[3],
Marta João Francisco Silva[4]

[1]IFG – Câmpus Jataí/ tales.carvalho@academico.ifg.edu.br
[2]IFG – Câmpus Jataí/ ronan.pereira@estudantes.ifg.edu.br
[3]IFG – Câmpus Jataí/ hugo.couto@ifg.edu.br
[4]IFG – Câmpus Jataí/ marta.souza@ifg.edu.br

Resumo

O Problema dos Três Corpos, um dos mais importantes da Astronomia, ainda é pouco abordado no ensino de Física da educação básica. Visando contribuir com a inserção desse tema na educação básica, neste trabalho relatamos o desenvolvimento de simulações computacionais do Problema dos Três Corpos. Discutimos brevemente as propriedades de algumas das órbitas obtidas e apresentamos perspectivas de desenvolvimentos futuros.

Palavras-chave: Problema dos Três Corpos. Astronomia. Ensino de Física.

Introdução

A Astronomia é considerada a mais antiga das ciências e tem como objetivo a observação dos astros e seus movimentos a fim de explicar a origem e evolução do universo. Essa ciência, que etimologicamente significa “lei das estrelas”, geralmente desperta a curiosidade e o fascínio tanto dos adultos quanto das crianças, que buscam compreender fenômenos astronômicos cotidianos, como as fases da Lua, um eclipse, uma chuva de meteoros e um cometa ou se encantam com a beleza das estrelas e da Via Láctea ao observar o céu em uma noite sem Lua, longe das luzes da cidade.

Também é comum que o interesse pela compreensão dos mistérios do céu se inicie a partir de textos ou vídeos de divulgação científica, visitas a museus, documentários ou filmes. Segundo Carrara e Langhi (2023) isso ocorre porque o ser humano ainda preserva no seu íntimo o desejo e a necessidade de ampliar seus limites do saber, na busca pela exploração do espaço e do tempo.

Muitos autores defendem a inserção da Astronomia na educação básica. Beatty (2000 apud Langhi 2009) afirma que a Astronomia apresenta uma alta potencialidade interdisciplinar e possibilita inúmeras interfaces com outras disciplinas, como Física, Matemática, Geografia, História, Química, Literatura e até mesmo Artes. Além disso, é possível integrar conteúdos, de forma que os estudantes tenham uma visão menos fragmentada do conhecimento (Dias; Santa

Rita, 2008). Para além do conhecimento científico, Langhi (2004) afirma que estudar Astronomia pode levar os alunos a compreender a imensidão do Universo e sua responsabilidade como seres humanos habitantes do planeta Terra.

No Brasil, muito embora a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) preveja conteúdos de Astronomia ao longo do Ensino Fundamental e Médio (Brasil 2017), não existe, desde o decreto do Estado Novo de 1942, uma disciplina específica sobre o tema. Entretanto, a coordenação do curso de Licenciatura em Física do IFG-Câmpus Jataí vem desenvolvendo ações ao longo dos anos que visam incentivar os estudantes ao estudo de fenômenos astronômicos, como: incentivo à participação dos alunos do Ensino Médio na Olimpíada Brasileira de Astronomia (OBA); inserção da disciplina de Astronomia na matriz curricular do curso de Licenciatura em Física, aquisição de um telescópio Celestron Nexstar 114 e de um CPC800; desenvolvimento de projetos de estágio, trabalhos de final de curso na área e projetos de iniciação científica.

Neste sentido, a proposta deste trabalho se originou a partir da solicitação de um estudante de ensino médio após participar da Olimpíada Brasileira de Astronomia em maio de 2024 e assistir a uma série de ficção científica intitulada *"O problema dos três corpos"*[1]*,* que propôs aos seus professores estudar o assunto por meio de um projeto de iniciação científica. A série mencionada foi baseada em uma trilogia escrita pelo engenheiro chinês Liu Cixin na qual uma astrofísica chinesa entra em contato com uma civilização alienígena evoluída que vive no planeta Trissolaris. A vida neste planeta está à beira da extinção devido a uma condição especial: ele orbita três estrelas, o que o faz oscilar entre períodos climáticos estáveis, como os da Terra, e períodos caóticos, nos quais a temperatura varia em centenas de graus em poucos instantes. Assim, para garantir a sobrevivência da sua espécie, eles resolvem invadir a Terra.

O problema dos três corpos, que dá nome ao primeiro livro de Liu Cixin (e à série) vem sendo estudado há séculos, tanto de forma analítica, quanto numérica. Ocorre quando três corpos celestes interagem gravitacionalmente entre si, desafiando as previsões das leis de Kepler e exigindo métodos mais avançados de análise para compreender o comportamento orbital dos corpos.

A lei da gravitação de Newton está presente nos cursos de Física de nível médio e superior e, frequentemente, pode ser encontrada nos livros didáticos. Essa teoria permite uma solução analítica exata para o problema de dois corpos, ou seja, dados dois corpos de massas

[1] A série "O Problema dos Três Corpos" (2024) está disponível na plataforma de streaming Netflix.

quaisquer, sujeitos à atração gravitacional entre eles, partindo de posições e velocidades determinadas, podemos determinar suas posições e velocidades em qualquer instante de tempo.

A determinação das trajetórias de três corpos interagindo gravitacionalmente de maneira simultânea define o que chamamos de Problema dos Três Corpos, que é considerado um dos mais importantes da mecânica celeste, ramo da Astronomia que estuda o movimento dos corpos celestes, e vem sendo estudado há séculos, tanto de forma analítica, quanto numérica.

Entretanto, o Problema dos Três Corpos se mostrou mais complicado e hoje é considerado como o mais importante da mecânica celeste (Macedo; Junior, 2018). Segundo Onody (2024), ele é inerentemente caótico, o que inviabiliza a criação de uma solução analítica universal, visto que diferenças infinitesimais podem acarretar em resultados completamente diferentes.

A despeito disso, as órbitas de diversos astros devem-se essencialmente à interação de três corpos, como as órbitas de planetas perturbadas pelos seus vizinhos, as órbitas de cometas e de asteroides do sistema solar e as órbitas de corpos em torno de uma estrela binária, galáxias ou buracos negros (Valtonen et al., 2016). O estudo sistemático desses problemas tem trazido resultados muito interessantes para a Astronáutica, como "[...] a utilização do efeito de estilingue gravitacional para as viagens espaciais, a determinação das trajetórias de asteroides e cometas que se aproximam da Terra e a utilização dos pontos de Lagrange para um posicionamento seguro dos nossos telescópios espaciais" (Onody, 2024, s/p).

Naturalmente, os cientistas estudaram casos especiais desse problema, que ficaram conhecidos como o Problema Restrito dos Três Corpos (PRTC), inicialmente proposto por Henri Poincaré. Essa simplificação toma um corpo como tendo massa desprezível, o que o impediria de afetar os outros dois. Assim, os dois corpos maiores podem ser resolvidos como um problema de dois corpos, sobrando apenas o terceiro.

Neste trabalho, discutimos qualitativamente algumas situações particulares do PRTC mediante o uso da solução numérica das equações diferenciais envolvidas. Isso foi feito por Macedo e Junior (2018), utilizando o método de Cauchy em um código escrito na linguagem de programação Python (Ribeiro, 2025) para o caso de órbitas circulares, que é o mais simples. Os autores utilizaram os resultados obtidos para estudar algumas aplicações, dentre elas estimativas e simulações de órbitas reais do nosso próprio sistema solar, como o sistema Sol-Netuno-Plutão, para mostrar graficamente que esses astros não colidirão por milhões de anos. O posicionamento da Estação Espacial Internacional (ISS) em relação à Terra também é determinado por meio do PRTC, visto que a atração gravitacional da Lua não pode ser desprezada nesse caso.

Diante do exposto, vemos que é possível compreender o Problema dos Três Corpos em situações específicas, mesmo na educação básica, a partir da lei da gravitação de Newton. Nesse sentido, este trabalho é um recorte de um projeto de iniciação científica que buscou estudar o Problema dos Três Corpos, a partir da sua origem histórica, por meio de simulações numéricas, avaliar sua importância na predição de fenômenos astronômicos como eclipses e perturbações orbitais, e discutir suas aplicações práticas como as missões espaciais, detecção de exoplanetas e compreensão da evolução galáctica e, a partir daí elaborar um material de apoio que possa ser utilizado no ensino médio por professores que quiserem abordar o tema em suas aulas. O objetivo desse recorte é apresentar a etapa de desenvolvimento de algumas simulações computacionais do Problema dos Três Corpos e discutir brevemente as propriedades de algumas das órbitas obtidas.

Metodologia

Iniciamos o projeto explorando as origens históricas do Problema dos Três Corpos, com base na teoria da gravitação de Newton, para entender a fundo a importância desse problema na Astronomia. Investigamos exemplos de sistemas astronômicos reais, como o sistema mostrado no artigo “O sistema Sol-Terra-Lua: uma breve simulação numérica usando Python” (Silva et al, 2018), que ilustra como simulações em Python podem ajudar a entender o significado que as equações de movimento carregam em si.

A partir daí, começamos a desenvolver simulações de movimentos orbitais. Inicialmente, simulamos o sistema Terra-Lua juntamente com o Sistema Solar e, em seguida, avançamos para o PRTC, onde montamos dois códigos, um para o sistema Terra-Lua-Estação Espacial Internacional (ISS) e outro para um sistema estelar binário com um pequeno planeta. As simulações orbitais foram realizadas ajustando o código do artigo de Silva et al (2018), configurando as bibliotecas necessárias para fazer os cálculos. Além disso, foi desenvolvido um novo tipo de gráfico com simulações animadas no formato de *gif*, incluindo novas equações de movimento para sistemas diferentes.

Para o sistema de dois corpos Terra-Lua e para cada planeta do Sistema Solar, foram utilizadas as equações 1-4, calculando as posições e velocidades nos eixos x e y, visto que nossos gráficos são bidimensionais. Todas as grandezas foram adimensionalizadas, de modo que a unidade de comprimento utilizada é a distância média R entre a Terra e o Sol e a unidade de tempo é $t' = \sqrt{R^3/GM}$, onde G é a constante gravitacional universal e M é a massa do Sol. Consideramos cada um dos planetas partindo do afélio da sua órbita, tomando as posições e velocidades disponibilizadas no site da NASA.

$$\frac{dX}{dT} = V_x \quad (1) \qquad \frac{dY}{dT} = V_y \quad (2)$$

$$\frac{dV_x}{dT} = -\frac{X}{(X^2+Y^2)^3} \quad (3) \qquad \frac{dV_y}{dT} = -\frac{Y}{(X^2+Y^2)^3} \quad (4)$$

As simulações foram divididas em pequenas seções, de forma a facilitar o entendimento do código. Inicialmente, foram importadas as bibliotecas necessárias, sendo elas: *Matplotlib*, para a plotagem de gráficos e sua animação; *Numpy*, para a utilização de funções matemáticas; e *Scipy*, para a resolução das equações de movimento utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem.

Em seguida, foram definidos os valores da massa, da velocidade e da distância entre os astros. Também foi definida a unidade de tempo, de forma a simplificar as equações. Foram definidos os valores das condições iniciais e as equações de movimento, assim como o período de tempo e a quantidade de pontos a serem calculados.

A biblioteca *Scipy* possui uma função que deve ser alimentada com as equações, as condições iniciais, o período de tempo, o método, e a quantidade de pontos a serem calculados, retornando os valores de posição e velocidade para todos os astros. Aplicamos essa função e extraímos os valores de posição e velocidade, em formato de uma matriz bidimensional para a construção dos gráficos. Por fim, as órbitas foram animadas, por meio de uma função que atualiza constantemente os valores de x e y de todas elas com as posições retornadas pela Scipy.

As equações com três corpos possuem uma estrutura similar a do sistema de dois corpos. A unidade de comprimento R adotada no sistema Terra-Lua-ISS (TLI) é a distância entre a Terra e a Lua no apogeu da sua órbita, enquanto que a unidade no sistema binário é a metade da distância inicial entre as duas estrelas. A unidade de tempo é obtida da mesma expressão do problema de dois corpos, isto é $t' = \sqrt{R^3/GM_2}$.

As equações 5-8 descrevem o movimento do corpo 1. No sistema TLI, o corpo 1 corresponde à Terra, enquanto corresponde a uma das estrelas no sistema binário.

$$\frac{dX_1}{dT} = V_{x_1} \quad (5) \qquad \frac{dY_1}{dT} = V_{y_1} \quad (6)$$

$$\frac{dV_{x_1}}{dT} = \frac{X_2 - X_1}{R_{21}^3} \quad (7) \qquad \frac{dV_{y_1}}{dT} = \frac{Y_2 - Y_1}{R_{21}^3} \quad (8)$$

O corpo 2, que é a Lua no sistema TLI e é a outra estrela no sistema binário, interage somente com o corpo 1 e seu movimento é descrito pelas equações 9-12.

$$\frac{dX_2}{dT} = V_{x_2} \quad (9) \qquad \frac{dY_2}{dT} = V_{y_2} \quad (10)$$

$$\frac{dV_{x_2}}{dT} = \frac{M_1(X_1 - X_2)}{M_2 R_{12}^3} \quad (11) \qquad \frac{dV_{y_2}}{dT} = \frac{M_1(Y_1 - Y_2)}{M_2 R_{12}^3} \quad (12)$$

O corpo 3, que é o menor dos corpos e tem massa desprezível, sofre atração dos outros dois e obedece às equações 13- 16.

$$\frac{dX_3}{dT} = V_{x_3} \quad (13) \qquad \frac{dY_3}{dT} = V_{y_3} \quad (14)$$

$$\frac{dV_{x_3}}{dT} = \frac{M_1(X_1 - X_3)}{M_2 R_{13}^3} + \frac{(X_2 - X_3)}{R_{23}^3} \ (15) \qquad \frac{dV_{y_3}}{dT} = \frac{M_1(Y_1 - Y_3)}{M_2 R_{13}^3} + \frac{(Y_2 - Y_3)}{R_{23}^3} \ (16)$$

Nas equações 5-16, $M_i,\ X_i,\ Y_i,\ V_{x_i},\ V_{y_i}$ e $R_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}$ referem-se respectivamente à massa, às coordenadas da posição e às coordenadas da velocidade do corpo *i* e à distância entre os corpos *i* e *j*, com $i, j = \{1, 2, 3\}$.

As condições iniciais para o sistema TLI são, nas unidades adotadas, $(X_1; Y_1) = (0; 0)$, $(V_{x_1}; V_{y_1}) = (0; 0)$, $(X_2; Y_2) = (1; 0)$, $(V_{x_2}; V_{y_2}) = (0; 1)$, $(X_3; Y_3) = (0; 0,01765)$ e $(V_{x_3}; V_{y_3}) = (7,53; 0)$[2]. Quanto ao sistema binário, consideramos duas estrelas de mesma massa ($M_1 = M_2 = 2 \cdot 10^{30}\, kg$) orbitadas por um planeta com massa $M_3 = 3 \cdot 10^{23}\, kg$, com condições iniciais arbitrárias, quais sejam, $(X_1; Y_1) = (0,5; 0)$, $(V_{x_1}; V_{y_1}) = (0; 0,383)$, $(X_2; Y_2) = (-0,5; 0)$, $(V_{x_2}; V_{y_2}) = (0; -0,383)$, $(X_3; Y_3) = (0; -2)$ e $(V_{x_3}; V_{y_3}) = (1,09; 0)$.

Resultados e discussões

As equações de movimento para o problema de dois corpos, o primeiro a ser simulado, foram deduzidas considerando o sistema Terra-Sol. Para isso, o Sol foi mantido fixo no centro da órbita e duas condições iniciais foram consideradas, a saber, a posição e velocidade no afélio e no periélio. Além disso, o código foi expandido para mostrar todas as órbitas de planetas do Sistema Solar, no período de vinte anos terrestres, conforme mostra a Figura 1.

[2] Os dados da ISS foram obtidos do site https://www.astroviewer.net/iss/pt/

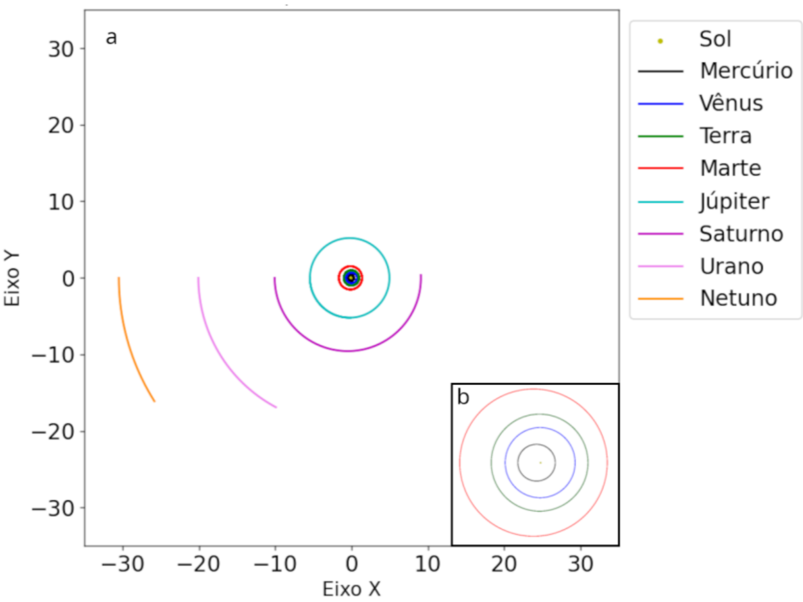

Figura 1: Órbitas do sistema solar durante vinte anos. a) Todos os planetas. b) Zoom nos planetas rochosos.

A Figura 1.a ilustra as órbitas obtidas para os planetas do Sistema Solar em escala. Percebe-se que, enquanto os planetas centrais realizaram órbitas completas, os planetas mais afastados descreveram somente um arco limitado das suas órbitas. Esse resultado confirma a previsão das Leis de Kepler. Nota-se ainda que a diferença de escala entre as órbitas dos planetas rochosos e dos planetas gasosos, característica que usualmente é perdida nas representações artísticas presentes em livros didáticos e materiais de divulgação científica. De fato, a estrutura interna do Sistema Solar só pode ser vista através da ampliação dessa região, vide Figura 1.b.

Após essa simulação, deduzimos as equações do movimento para o Problema dos Três Corpos, dentro dos parâmetros do PRTC. A partir dessas equações foram criadas duas simulações diferentes: a órbita da Estação Espacial Internacional (ISS), sofrendo a atuação da gravidade da Lua e da Terra (Figura 2), que simula 27 dias, e a órbita de um pequeno planeta em um sistema binário, em que as duas estrelas possuem a mesma massa (Figura 3), considerando um intervalo de tempo de cem anos. É importante destacar que os valores utilizados para a velocidade e posição iniciais das órbitas dos planetas em torno do Sol (Figura 1) e da Lua e da ISS em torno da Terra (Figura 2) foram extraídos do site da NASA[3], que não está mais ativo no momento da escrita deste artigo, em outubro de 2025. Já para o sistema binário com um planeta, os valores foram inteiramente arbitrários, mas as estrelas iniciam seu

3 https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/

movimento equidistantes da origem do sistema de coordenadas com velocidades com módulos iguais e sentidos opostos.

É importante destacar que as dimensões da Terra não foram representadas na Figura 2. Como o raio da Terra é aproximadamente 6370 km e a órbita da ISS oscila em torno de 400 km acima da sua superfície, uma representação mais fidedigna da órbita ilustrada na Figura 2.b mostraria a ISS relativamente próxima à superfície terrestre. Ainda assim, é importante destacar que a existência desse satélite artificial, assim como de tantos outros, não pode ser notada por sua órbita na Figura 2.a, onde podemos ver a órbita do satélite natural da Terra, a Lua.

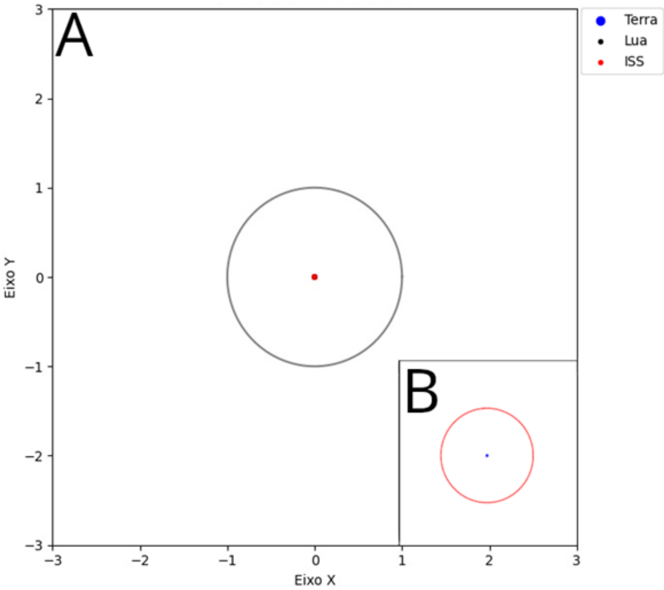

Figura *2*: Sistema Terra-Lua-ISS. A) Órbita da Lua em torno da Terra. B) Órbita da ISS em torno da Terra.

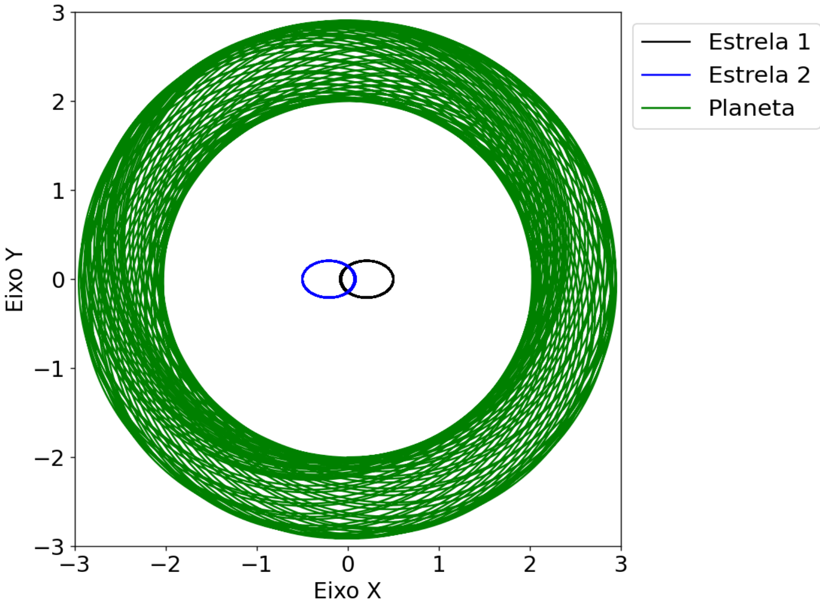

Figura 3: Planeta orbitando um Sistema binário

A Figura 3 exemplifica o quão diferentes as órbitas do PRTC podem ser das órbitas usuais do problema de dois corpos. Quando um planeta orbita uma estrela sem outras perturbações, sua órbita é elíptica, fechada com períodos bem definidos. Se, ao contrário, o planeta orbita um binário de estrelas, a órbita não fecha completamente, desviando (ligeiramente, no caso da Figura 3) da órbita elíptica. É difícil dizer, neste caso, se a órbita vai fechar e depois de quantas voltas isso vai acontecer, ou ainda se esse comportamento é regular.

Considerações Finais

Neste trabalho relatamos o desenvolvimento de um código em Python que simula o PRTC em situações específicas. Mostramos os resultados obtidos através de gráficos construídos com a técnica empregada e evidenciamos as potencialidades do seu uso discutindo brevemente algumas características dessas órbitas.

Vale destacar que esses são resultados parciais de um projeto de iniciação científica que objetiva aprofundar esse estudo e desenvolver simulações e proposta pedagógica que sirvam como material de apoio para a abordagem do Problema dos Três Corpos em sala de aula. Pretendemos, em um futuro próximo, publicar esse material, permitindo o seu livre acesso por professores e estudantes e contribuindo, portanto, com a popularização desse tema que rege fenômenos tão importantes e instigantes do nosso Sistema Solar e além.

Esperamos que o relatório final de iniciação científica, as simulações e gráficos obtidos, bem como suas análises, possam servir como material de apoio para os professores de Física do ensino médio que se interessarem em explorar esse tema com seus alunos, visto que a maioria dos textos que abordam o Problema dos Três Corpos envolvem conceitos matemáticos e físicos complexos, só estudados em cursos de nível superior.

Agências de fomento: Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concedida através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica no Ensino Médio EDITAL Nº 011/2024-PROPPG/IFG.

Referências

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, DF: MEC/SEF, 2017.

CARRARA, H. F.; LANGHI, R. Educação em Astronomia para a formação do cidadão cientista: análise de meteoros no ensino médio. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 7, p.158-183, 2023. Disponível em https://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/30717. Acesso em 04 jul 2024.

DARROZ, L. M. et al. Evolução dos conceitos de astronomia no decorrer da educação básica. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, v. 17, p.107-121, 2014. Disponível em https://www.relea.ufscar.br/index.php/relea/article/view/190. Acesso em 05 jul 2024.
DIAS, C. A. C. M.; SANTA RITA, J. R. Inserção da Astronomia como disciplina curricular do Ensino Médio. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, v. 6, p. 55-65, 2008.

LANGHI, R. **Um estudo exploratório para a inserção da Astronomia na formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2004. 240 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) - Faculdade de Ciências, UNESP: Bauru, 2004

LANGHI, R. Educação em Astronomia e formação continuada de professores: a interdisciplinaridade durante um eclipse lunar total. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, v. 7, p. 15-30, 2009.

MACEDO, G. S; JUNIOR, A. J. R. Aplicação do Problema Restrito de Três Corpos no estudo do movimento de astros do sistema solar. **Revista Brasileira de Ensino de Física** (online). v. 40, p. 4311, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/ngrxHPwZ6bDbbhvPnnLQ8LL/?format=pdf. Acesso em 05 jul 2024.

ONODY, R. N. **O problema dos três corpos (Parte-1)**. 2024. Disponível em https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/o-problema-dos-tres-corpos-parte-1-artigo-prof-roberto-n-onody/. Acesso em 05 jul 2024.

RIBEIRO, M. R. Python Básico. **IFMG Câmpus Bambuí**. 2025. Disponível em: https://mais.ifmg.edu.br/maisifmg/enrol/index.php?id=125. Acesso em 10 jan 2025.

SILVA, C. R. et al. O sistema Sol-Terra-Lua: uma breve simulação numérica usando Phyton. **Revista Ciências Exatas e Naturais**. v. 20, p.30-41, 2018. Disponível em: https://www.semanticscholar.org/paper/O-sistema-Sol-Terra-Lua%3A-Uma-breve-simula%C3%A7%C3%A3o-usando-Silva-Silva/aa01078194c8e588fd070f20c5d3ff81bab18ef.9. Acesso em 09 jul 2024.

VALTONEN, M. J.; KARTTUNEN, H. **The three-body problem**. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press, 2005.