

# Análise Teórica e Computacional do Gás Ideal Relativístico

Carlos Alexandre de Souza (IC)  
Cláudio J. DaSilva (PQ)

PROGRAMA: PIBIC  
CAMPUS GOIÂNIA  
CLAUDIO.SILVA@IFG.EDU.BR

**Palavras-chave:** Gás ideal. Relatividade. Distribuição de Jüttner.

## Introdução

Neste trabalho, propomos um protocolo para geração de velocidades aleatórias para um sistema de partículas relativísticas usando a distribuição de Jüttner (MJ), tida como a substituta mais confiável para a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann (MB) para o gás ideal clássico. A motivação é a sua utilização em simulações computacionais, as quais são uma ferramenta essencial para confirmar a consistência entre teorias nas áreas de Astrofísica ou Física de Altas Energias e os dados experimentais.

## Metodologia

O estudo foi iniciado fazendo-se uma demonstração formal da distribuição de Jüttner, que pôde enfim ser expressa como:

$$f_{MJ}(v) = \frac{\zeta v^2 (1-v^2/c^2)^{-5/2} e^{-\zeta/\sqrt{1-v^2/c^2}}}{c^3 K_2(\zeta)},$$

em que  $\zeta = mc^2/k_B T$  e  $K_2(\zeta)$  é a função modificada de Bessel.  $m$  é a massa da partícula,  $c$  a velocidade da luz e  $k_B$  a constante de Boltzmann. Para gerar velocidades aleatórias usamos a técnica da Função de Distribuição Cumulativa (CDF):

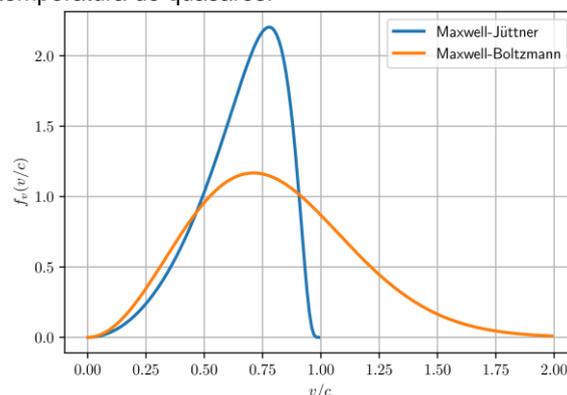
$$C_v(v) = \int_0^v f_v(v') dv'.$$

Toma-se, então, um conjunto de números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1 e usa-se o inverso da CDF para obter as velocidades. Neste trabalho, analisamos três sistemas distintos com as seguintes temperaturas: prótons à temperatura da superfície solar ( $T^* = 1/39,533$ ); elétrons à temperatura do critério de Lawson para reações D-D ( $T^* = 1/3,9587$  – regime relativístico); prótons à temperatura de quasares ( $T^* = 1/1,0888$  – regime ultrarelativístico).  $T^*$  está em unidades reduzidas ( $m = c = k_B = 1$ ).

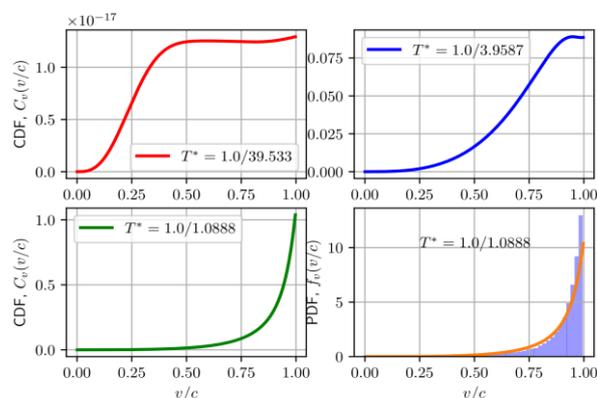
## Resultados e Discussão

A Figura 1 mostra uma comparação entre as distribuições clássica e relativística para elétrons à temperatura de  $1,5 \times 10^9$  K. Veja que a distribuição de MB falha neste regime, prevendo velocidades maiores que  $c$ . Por sua vez, a MJ limita claramente as velocidades do sistema a  $v < c$ . A Figura 2 mostra a CDF para os três regimes mencionados. Com isso, foi possível obter um conjunto de velocidades aleatórias que obedecem a distribuição de MJ, como

mostrado em baixo à direita da mesma figura, para prótons à temperatura de quasares.



**Figura 1** Comparação entre as distribuições de MB e MJ para elétrons à temperatura de  $1,5 \times 10^9$  K.



**Figura 2** CDF para três diferentes regimes. (Em baixo à direita) Histograma de velocidades para prótons à temperatura de quasares.

## Conclusões

A MJ permite uma boa interpretação das curvas de distribuição no regime relativístico. As velocidades obtidas estão em excelente acordo com a literatura e podem ser prontamente usadas em qualquer simulação atomística.

## Referências Bibliográficas

- SWISDAK, M.; *Physics of Plasmas* 20, 062110, 2013.  
TESTA, D. M. et al. *Phys. Rev. E*, 107, 054138, 2023.  
KUBLI, N.; HERRMANN, H. J. *Physica A*, 561, 125261, 2021.