Elementos Fundamentais de Análise Real e Álgebra Abstrata na construção dos Números de Liouville

Hugo Leonardo da Silva Belisário (PQ), Fernando Sacramento Reis Júnior (IC)

PIBIC
Câmpus Goiânia
hugo.belisario@ifg.edu.br

Palavras Chave: *Números de Liouville; Aproximação Racional; Números Irracionais; Números Transcendentes.*

Introdução

O projeto intitulado “Elementos Fundamentais de Análise Real e Álgebra Abstrata na construção dos Números de Liouville” propõe uma continuação dos estudos iniciados em 2019 do projeto “Aproximações Diofantinas, Aproximações Racionais e Algébricas e Números de Liouville”. Este trabalho busca aprofundar os estudos de aproximações racionais para compreensão de alguns resultados relacionados aos números de Liouville.

Metodologia

Um número real β é chamado de número de Liouville se existir uma sequência infinita de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$, com $q_j > 1$ tal que

$$\left|\beta - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$$

Para todo $j \geq 1$.

A sequência $(q_j)_{j\geq 1}$ é ilimitada, pois, supondo o contrário, iria existir um $M>0$ tal que $q_j \leq M$. Utilizando a definição de número de Liouville, e a propriedade do módulo conhecida como desigualdade diminuída, é possível obter a seguinte desigualdade:

$$|p_j| < M(|\beta|+1)$$

Mostrando que a sequência $(p_j)_{j\geq 1}$ também é limitada, o que é um absurdo, pois contraria o fato da sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ ser infinita, portanto, a sequência $(q_j)_{j\geq 1}$ é ilimitada.

Utilizando o fato de que a sequência $(q_j)_{j\geq 1}$ é ilimitada, é possível provar que todo número de Liouville é irracional e transcendente.

Usando o fato de que a união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula, é possível mostrar que que o conjunto $L \cap [0,1]$ tem medida nula, o que implica dizer que o conjunto dos números de Liouville tem medida nula.

Paul Erdös provou ainda que todo número real é soma de dois números de Liouville. Sabendo que a soma entre um número de Liouville e um número racional não nulo é um número de Liouville, podemos considerar $t \in Q$ e β um número de Liouville, logo $\gamma = t - \beta$ é um número de Liouville, daí $t = \gamma + \beta$, o que mostra que todo número racional é soma de dois números de Liouville. Também é possível mostrar que todo irracional pode ser escrito como a soma de dois números de Liouville.

Conclusões

Deste trabalho podemos concluir que todo número de Liouville é irracional e transcendente, o conjunto dos números de Liouville possuem medida nula na reta e que todo número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville.

____

Referências

[1] BUGEAUD, Yann. Approximation by Algebraic Numbers. New York: Cambridge University Press, 2004.

[2] MARQUES, Diego. Teoria dos números transcendentes. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.