

Submetido 18/09/2024. Aprovado 10/03/2025  
Avaliação: revisão duplo-anônimo

# Modelagem bi e tridimensional de uma mistura asfáltica considerando o efeito viscoelástico: análises de sensibilidade e probabilística

BI AND THREE-DIMENSIONAL MODEL OF AN ASPHALT MIXTURE CONSIDERING VISCOELASTIC EFFECT: PROBABILISTIC AND DETERMINISTIC ANALYSES

MODELADO BI Y TRIDIMENSIONAL DE UNA MEZCLA ASFÁLTICA CONSIDERANDO EL EFECTO VISCOELÁSTICO: ANÁLISIS PROBABILÍSTICO Y DETERMINÍSTICO

**Albert Willian Faria**

Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)  
albert.faria@uftm.edu.br

**Felipe Pulheis Rodrigues**

Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)  
felipepulheis@hotmail.com

**Fabian Andres Lara-Molina**

Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)  
fabian.molina@uftm.edu.br

## Resumo

Revestimentos asfálticos são sujeitos a cargas repetidas do tráfego de veículos, gerando patologias como trincas e afundamentos. Este artigo aborda a modelagem bidimensional e tridimensional de um corpo de prova (CP) de uma mistura betuminosa típica utilizada como revestimento asfáltico, empregando o Método dos Elementos Finitos no ANSYS. O estudo foca na análise probabilística do comportamento mecânico da mistura sob cargas de compressão no decorrer do tempo, tema ainda pouco abordado nos pavimentos nacionais, que pode auxiliar na mitigação de patologias e na escolha dos revestimentos asfálticos mais adequados conforme condições de uso. A série de Prony, expressa em termos do módulo de relaxação  $E(t)$ , é usada na modelagem do comportamento viscoelástico da mistura. Diversas estatísticas são exploradas, incluindo a Função Densidade de Probabilidade (PDF) e a Função Densidade Acumulada (CDF), utilizadas para caracterizar a distribuição dos dados e a variabilidade do deslocamento axial. Além disso, o coeficiente de correlação foi aplicado para quantificar a relação entre as variáveis de projeto do CP (altura, diâmetro, material e carga aplicada) e a variável dependente, identificando os fatores de maior influência no comportamento mecânico da mistura. O máximo deslocamento axial (variável dependente), obtido no ensaio de fluência, apresentou baixo erro percentual (2,77% no modelo 2D e 3,06% no 3D) em relação aos valores experimentais, com média de 0,704 mm e desvio padrão máximo de 0,068 mm. Os modelos probabilísticos 2D evidenciam o impacto das incertezas, especialmente dos módulos  $E_0$ ,  $E_\infty$  e  $E_1$ , na resposta da variável dependente. Os coeficientes de correlações de Pearson e de Spearman produziram resultados similares na análise de significância das variáveis de projeto do CP (altura, diâmetro, material e carga aplicada) em relação à variável dependente. Conclui-se que os modelos implementados são validados experimentalmente e

que o CP analisado apresenta comportamento mecânico com baixa dispersão dos dados, indicando consistência e previsibilidade.

**Palavras-chave:** incertezas; betume; MEF; sensibilidade; Série de Prony; viscoelástico.

### Abstract

Asphalt pavements are subjected to repeated vehicle traffic loads, causing cracks and rutting. This article addresses the bi- and three-dimensional modeling of a specimen (CP) of a national bituminous mixture used as an asphalt pavement, employing the Finite Element Method in ANSYS. The study focuses on the probabilistic analysis of the mechanical behavior of the mix under compressive loads over time. This topic still needs to be explored in national pavements, which can assist in mitigating issues and selecting the most suitable asphalt pavements according to usage conditions. The Prony series, expressed in terms of the relaxation modulus  $E(t)$ , is used to model the viscoelastic behaviour of the mixture. The study conducted various statistical analyses, including the Probability Density Function (PDF) and the Cumulative Density Function (CDF), to characterize the data distribution and variability of axial displacement. Additionally, the Correlation Coefficient was employed to quantify the relationship between the specimen design variables (height, diameter, material, and applied load) and the dependent variable, identifying the most influential factors in the mechanical behavior of the mixture. The maximum axial displacement (dependent variable), obtained in the creep test, showed a low percentage error (2.77% in the 2D model and 3.06% in the 3D model) compared to the experimental values, with an average of 0.704 mm and a maximum standard deviation of 0.068 mm. The 2D probabilistic models highlight the impact of uncertainties, especially the  $E_0$ ,  $E_\infty$ , and  $E_1$  moduli, on the dependent variable's response. Pearson and Spearman Correlation Coefficients produced similar results in the significance analysis of the CP design variables (height, diameter, material, and applied load) concerning the dependent variable. The study concluded that the implemented models are experimentally validated and that the analyzed CP exhibits mechanical behavior with low data dispersion, indicating consistency and predictability.

**Keywords:** uncertainties; bitumen; FEM; sensitivity; Prony Series; viscoelasticity.

### Resumen

Los revestimientos asfálticos están sujetos a cargas repetidas del tráfico de vehículos, generando patologías como grietas y deformaciones. Este artículo trata sobre el modelo bi y tridimensional de un cuerpo de prueba (CP) de una mezcla bituminosa nacional utilizada como revestimiento asfáltico, empleando el Método de los Elementos Finitos en ANSYS. El estudio se enfoca en el análisis probabilístico del comportamiento mecánico de la mezcla bajo cargas de compresión a lo largo del tiempo, un tema aún poco explorado en los pavimentos nacionales, lo que puede ayudar en la mitigación de patologías y en la selección de los revestimientos asfálticos más adecuados según las condiciones de uso. La serie de Prony, expresada en términos del módulo de relajación  $E(t)$ , se utiliza para modelar el comportamiento viscoelástico de la mezcla. Se realizaron diversos análisis estadísticos, incluyendo la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) y la Función de Densidad Acumulada (CDF), para caracterizar la distribución de los datos y la variabilidad del desplazamiento axial. Además, se empleó el Coeficiente de Correlación para cuantificar la relación entre las variables de diseño de la probeta (altura, diámetro, material y carga aplicada) y la variable dependiente, identificando los factores de mayor influencia en el comportamiento mecánico de la mezcla. El desplazamiento axial máximo (variable dependiente), obtenido en el ensayo de fluencia, presentó un bajo error porcentual (2.77% en el modelo 2D y 3.06% en el modelo 3D) en comparación con los valores experimentales, con un promedio de 0.704 mm y una desviación estándar máxima de 0.068 mm. Los modelos probabilísticos 2D evidencian el impacto de las incertidumbres, especialmente de los módulos  $E_0$ ,  $E_\infty$  y  $E_1$ , en la respuesta de la variable dependiente. Los Coeficientes de Correlación de Pearson y Spearman produjeron resultados similares en el análisis de significancia de las variables de diseño del CP (altura, diámetro, material y carga aplicada)

en relación con la variable dependiente. Se concluye que los modelos implementados están validados experimentalmente y que el CP analizado presenta un comportamiento mecánico con baja dispersión de datos, indicando consistencia y previsibilidad.

**Palabras clave:** incertidumbres; betún; MEF; sensibilidade; Série de Prony; viscoelasticidad.

## Introdução

As rodovias desempenham um papel fundamental no sistema logístico do país, sendo responsáveis respectivamente por 60% e 90% das cargas e dos passageiros transportados em comparação aos demais modais (Medina; Motta, 2015). Dessa maneira, a infraestrutura rodoviária deve estar em condições adequadas para o tráfego, pois deficiências como irregularidades no pavimento ou a falta de manutenção podem aumentar os custos operacionais dos veículos, do transporte de passageiros, de produtos e serviços. Além disso, uma infraestrutura inadequada contribui para impactos ambientais significativos, como o aumento do congestionamento, que resulta em maior consumo de combustíveis fósseis e, conseqüentemente, em emissões mais elevadas de poluentes.

O tráfego intenso e o excesso de carga de certos veículos também causam danos significativos aos pavimentos asfálticos, que incluem o afundamento da trilha de roda, trincamento por fadiga, exsudação do asfalto, escorregamento, panelas e afundamento de consolidação. Portanto, compreender o comportamento mecânico do pavimento asfáltico é essencial para mitigar patologias estruturais. Isso proporciona maior conforto ao usuário, com uma superfície mais regular, além de melhorar a segurança viária ao aumentar a aderência dos pneus. Do ponto de vista ambiental, a manutenção adequada reduz o consumo de combustíveis e a emissão de poluentes. Financeiramente, minimiza custos de operação e manutenção, evitando reparos emergenciais e o desgaste prematuro dos veículos.

O pavimento asfáltico deve ser projetado para suportar as cargas do tráfego de veículos e influências climáticas, manifestadas pelas variações diárias de temperatura e umidade, e os efeitos do seu envelhecimento (*aging effect*) (Lakes, 2009). Normalmente, ele é projetado como uma estrutura multicamada tipicamente constituída por um revestimento asfáltico seguido por uma base, uma sub-base e um subleito. Cada uma dessas camadas desempenha funções específicas relacionadas à distribuição dos carregamentos aplicados na impermeabilização, na melhoria das condições de rolamento, na segurança de tráfego e no suporte da superfície do pavimento asfáltico.

As misturas asfálticas do tipo betuminosa, empregadas como revestimento dos pavimentos asfálticos, caracterizam-se por apresentarem um comportamento viscoelástico influenciado pela temperatura e pela velocidade de circulação de veículos, ou seja, pelo tempo de aplicação das cargas (Portela *et al.*, 2008; Pinto; Pinto, 2015). Dessa forma, o betume é considerado um material viscoelástico que tende a ser mais rígido quando submetido a cargas mecânicas de curta duração, de menor pulso, e a ser menos rígido quando sujeito a cargas de longa duração, de maior pulso (Bernucci *et al.*, 2022), sendo também observado o efeito inverso em relação às cargas de origem térmica.

Esse trabalho busca validar numericamente a modelagem por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) de um corpo de prova (CP) cilíndrico feito de material betuminoso com os resultados experimentais de um ensaio de fluência  $D(t)$  disponível na literatura. Além disso, incertezas são introduzidas nas variáveis de projeto, como

nas propriedades dos materiais (módulo de relaxação e coeficiente de Poisson), nas condições de carregamento (intensidade da carga) e na geometria do corpo de prova (dimensões) para investigar a sensibilidade e a probabilidade associadas ao máximo deslocamento axial do corpo de prova ao longo do ensaio.

Estudos sobre modelagem probabilística aplicada a pavimentos asfálticos, incluindo os trabalhos de Caro, Castilho e Sánchez-Silva (2013), Kassem (2017) e Liu *et al.* (2021). Caro Castilho e Sánchez-Silva (2013) utilizaram uma técnica estocástica em combinação com modelagem por elementos finitos para investigar o impacto da distribuição interna de vazios de ar em distintas misturas asfálticas. Kassem (2017) propôs uma metodologia para caracterizar diferentes tipos de misturas de concreto asfáltico, considerando incertezas nas propriedades dos materiais. Sua abordagem probabilística permitiu prever o comportamento viscoelástico e de dano das misturas, com distribuição de probabilidades. Liu *et al.* (2021) conduziram um estudo sobre como a compactação do pavimento durante a construção afeta seu desempenho mecânico, concluindo que a microestrutura do asfalto influencia a compactação e a resistência mecânica varia de acordo com os indicadores de compactação e a temperatura de medição.

Apesar desses avanços, algumas pesquisas na literatura nacional ainda apresentam uma lacuna no que se refere à consideração das incertezas nos parâmetros macromecânicos associados à geometria, ao módulo de relaxação da mistura e ao carregamento em misturas betuminosas comumente usadas no Brasil, como o Cimento Asfáltico de Petróleo (CAP 50-70), reforçado com fibras.

Diante desse contexto, o presente trabalho tem como objetivo utilizar o MEF para modelar essa mistura asfáltica e realizar uma análise probabilística e de sensibilidade em relação ao máximo deslocamento axial durante o ensaio de fluência. Ao considerar as incertezas nos parâmetros macromecânicos e aplicar uma abordagem probabilística, este estudo busca contribuir para a melhoria da qualidade e da durabilidade das pavimentações asfálticas no Brasil. Além disso, espera-se que os resultados auxiliem na garantia da segurança viária, na eficiência das estradas brasileiras e na otimização dos investimentos em infraestrutura viária.

## Comportamento viscoelástico de misturas asfálticas

As misturas asfálticas são compostas principalmente por agregados minerais, ligante asfáltico e, em alguns casos, aditivos ou modificadores, como a ilustrada no corpo de prova betuminoso apresentado na Figura 1, que ilustra o aparato experimental de um ensaio mecânico utilizado para a caracterização do seu comportamento viscoelástico.

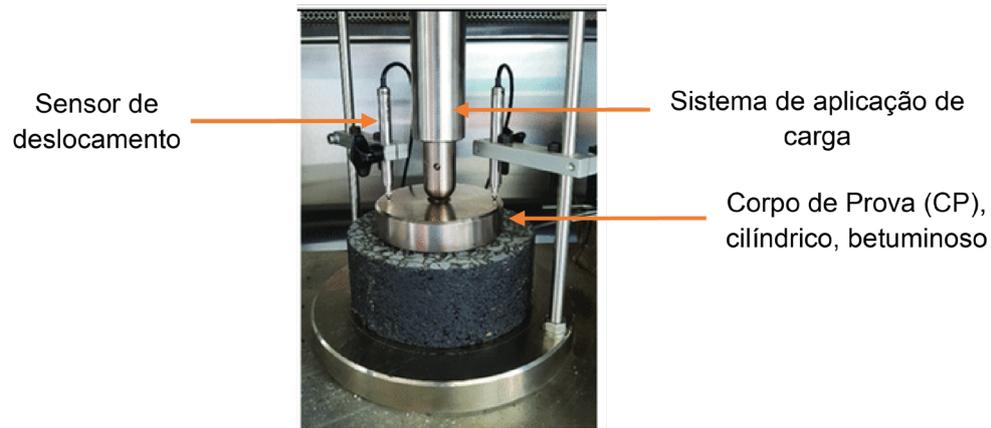


Figura 1 – Aparato experimental do ensaio de fluência de uma mistura asfáltica betuminosa

Fonte: Pokorski, Radziszewski e Sarnowski (2021).

Os revestimentos betuminosos desempenham diversas funções em um pavimento asfáltico, incluindo suportar as cargas provenientes do tráfego, proteger as camadas subjacentes do pavimento (base, sub-base e subleito), proporcionar uma superfície de rolamento adequada, apresentar flexibilidade, resistir à ação abrasiva causada pelo tráfego e proteger as demais camadas do pavimento dos efeitos do intemperismo (Pinto; Pinto, 2015). O concreto betuminoso usinado a quente é uma mistura constituída normalmente por agregado (gráudo e miúdo), material de enchimento e ligante betuminoso, podendo ser adicionadas fibras.

Torquato e Silva *et al.* (2013), Xu e Prozzi (2015), Chen, Balieu e Kringos (2017), García *et al.* (2019) e Faria e Garcia (2023) investigaram o comportamento mecânico do betume, utilizado em misturas asfálticas, levando em conta sua natureza viscoelástica modelada matematicamente, no domínio do tempo, por meio da série de Prony (modelo generalizado de Maxwell). Essa série matemática pode ser utilizada para expressar o módulo de relaxação  $E(t)$  ou o módulo de fluência  $D(t)$  do material betuminoso por meio de uma soma de termos exponenciais decrescentes.

O módulo de fluência  $D(t)$  é uma propriedade viscoelástica que descreve a deformação plástica ou permanente de um material no decorrer do tempo  $\varepsilon(t)$  quando submetido a uma tensão  $\sigma_{-0}$  constante, ou seja,  $D(t) = \varepsilon(t) / \sigma_{-0}$  representa a taxa de deformação plástica em razão do tempo. Por outro lado, o módulo de relaxação  $E(t)$  descreve a variação da tensão no decorrer do tempo  $\sigma(t)$ , quando o material é submetido a uma deformação constante  $\varepsilon_{-0}$ , ou seja,  $E(t) = \sigma(t) / \varepsilon_{-0}$ . Em outras palavras,  $E(t)$  reflete a rigidez do material em um dado instante de tempo. Esses módulos, para um material betuminoso qualquer, podem ser obtidos respectivamente pelos ensaios de relaxação ou de fluência (*creep*), ilustrado na Figura 1, detalhados em Medina e Motta (2015).

A seguir, é apresentada a equação da série de Prony, que pode ser utilizada para a aproximação do módulo de relaxação  $E(t)$  de um material viscoelástico no domínio do tempo (Christensen, 2003).

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_i} E_i^{(-t/\tau_i)} \quad (1)$$

Sendo:

$E_\infty$  - o módulo de elasticidade (relaxação) à frequência infinita da série, que representa a resposta elástica máxima do material em altas frequências sem ocorrência significativa de dissipação viscoelástica entre ciclos de carga.

$E_i$  - são os parâmetros de Prony que descrevem a contribuição de cada termo exponencial “ $i$ ” da série para o módulo de relaxação do material.

$\tau_i$  - representa os tempos característicos ou tempos de relaxação associados a cada termo exponencial “ $i$ ” na série e descrevem a rapidez com que o termo exponencial contribui para a relaxação da tensão no material, quanto maior o seu valor mais rápido o termo exponencial relaxa.

$n_i$  - trata-se do número de termos utilizados na série de Prony.

Alternativamente, a Equação (1) pode ser reescrita sob a forma (Christensen, 2003):

$$E(t) = E_0 \left( \alpha_\infty + \sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i e^{-t/\tau_i} \right) \quad (2)$$

Sendo:

$E_0$  é o módulo de relaxação inicial da mistura, que representa a rigidez inicial do material antes que ocorra qualquer relaxação viscoelástica significativa do material.

$\alpha_i$  ( $\alpha_i = E_i/E_0$ ) e  $\alpha_\infty$  ( $\alpha_\infty = E_\infty/E_0$ ) representam coeficientes (parâmetros) adimensionais de Prony associados respectivamente aos módulos  $E_i$  e  $E_\infty$ .

Não há uma relação direta entre os módulos de relaxação  $E(t)$  e o de fluência  $D(t)$ . No entanto, a literatura sobre essa temática apresenta alguns métodos aproximados de interconversão entre essas duas funções, tais como o método de Boltzmann, o modelo de Maxwell e diversos métodos empíricos. Alguns desses métodos podem ser consultados no trabalho de Christensen (2003).

O ensaio de fluência conduzido por Souza (2010), utilizando um corpo de prova cilíndrico e betuminoso, tal como o ilustrado na Figura 1, é implementado numericamente neste trabalho por meio do MEF. Os efeitos da temperatura sobre as propriedades viscoelásticas do corpo de prova não serão abordados, mas as formulações desses e de outros modelos podem ser consultadas em Lakes (2009). As teorias mais comuns para considerar a influência da temperatura em materiais viscoelásticos incluem a teoria de Arrhenius, o modelo de WLF (Williams-Landel-Ferry), o modelo de Burgers, o modelo empírico de Vogel-Tamman-Fulcher (VTF) e outros.

O MEF tem sido amplamente utilizado na mecânica do pavimento para estimar as propriedades viscoelásticas de misturas asfálticas, incluindo o módulo de relaxação  $E(t)$  e, alternativamente, os módulos de resiliência ( $MR$ ) e dinâmico ( $|E|$ ). Essa abordagem é realizada, por exemplo, nos estudos numéricos de García *et al.* (2019) para o  $E(t)$ , nos estudos de Torquato e Silva *et al.* (2013) para o  $MR$  e nos estudos Rabelo, Babadopulos e Soares (2020) para o  $|E|$ , nos quais esses módulos foram estimados a partir do ajuste entre dados experimentais e numéricos obtidos por meio do MEF.

Na modelagem de misturas asfálticas, é possível empregar tantos modelos tridimensionais (3D) quanto bidimensionais (2D). Os modelos numéricos 3D são amplamente utilizados em problemas complexos – em termos de geometria, carregamentos e condições de contorno – e micromecânicos, pois permitem representar com mais precisão e realismo a distribuição dos materiais, das cargas e das condições de contorno da estrutura ou do material modelado.

Por outro lado, modelos bidimensionais (2D) são empregados em análises que requerem um menor custo computacional em termos de tempo de processamento. Existem diferentes estados planos de análise usados na modelagem de problemas específicos, sendo os mais comuns o Estado Plano de Tensão (EPT), o Estado Plano de Deformação (EPD) e o Estado Plano de Axissimetria (EPA), ilustrados respectivamente na Figura 2 em (a), (b) e (c).

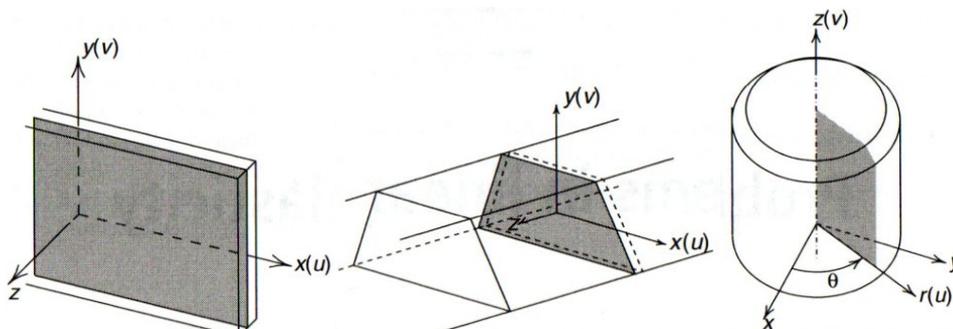


Figura 2 – Simplificações de um problema tridimensional: estado plano de tensão (a), estado plano de deformação (b) e axissimetria (c)

Fonte: Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2006).

O EPT, ilustrado na Figura 2(a), é empregado em problemas nos quais uma das dimensões do objeto é muito menor em comparação com as outras duas, como em placas finas e em vigas planas. Nesse estado, as tensões na direção perpendicular ao plano são consideradas insignificantes, permitindo que as análises sejam feitas apenas no plano bidimensional (Zienkiewicz; Taylor; Zhu, 2006). Isso simplifica a resolução de problemas mecânicos, já que as tensões são analisadas apenas no plano da superfície, reduzindo a complexidade do modelo.

O EPD, ilustrado na Figura 2(b), é aplicado em corpos longos em uma direção, como barragens, paredes espessas ou pavimentos asfálticos, onde as deformações ao longo da direção longitudinal são mínimas (Zienkiewicz; Taylor; Zhu, 2006). Nesse estado, as deformações são consideradas apenas no plano bidimensional, o que facilita a modelagem e análise de problemas tridimensionais pelo MEF. Essa abordagem é útil para simplificar a análise de materiais que apresentam simetria em torno de um eixo, concentrando-se nas deformações dentro do plano principal.

Por fim, o EPA, ilustrado na Figura 2(c), é utilizado em problemas nos quais a geometria, as condições de contorno e as cargas são simétricas em torno de um eixo axial, como em discos, anéis, vasos de pressão e corpos de prova cilíndricos. No MEF, a axissimetria permite reduzir um problema tridimensional para um bidimensional no plano radial e axial, já que as variáveis dependem apenas dessas duas coordenadas. Isso simplifica significativamente a análise e a solução do problema, mantendo a precisão necessária.

## Análise probabilística e de sensibilidade

As incertezas inerentes às variáveis de projeto, como máquinas, equipamentos e sistemas estruturais diversos, podem ser integradas às modelagens no MEF, resultando no chamado MEF probabilístico – ou estocástico. Isso pode ser feito, por exemplo, integrando o MEF com a Simulação de Monte Carlo (SMC). A SMC recebeu esse nome em referência à cidade de Monte Carlo, situada no principado de Mônaco, conhecida por seus cassinos (Beck, 2019). As vantagens da SMC incluem a facilidade de implementação computacional e a capacidade de lidar com problemas complexos, sejam eles lineares e não lineares, em diversas áreas do conhecimento, como economia, medicina, astrofísica e engenharia, proporcionando soluções robustas. As principais limitações da SMC estão relacionadas ao custo computacional e ao tempo de processamento.

A SMC envolve a definição de funções de densidade de probabilidade, técnicas de amostragem e geradores de número aleatórios. A Função Densidade de Probabilidade (FDP) de uma variável aleatória  $X$  é uma função  $f(x)$  usada para descrever as probabilidades associadas aos seus possíveis valores, conforme a equação (Montgomery; Runger; Hubele, 2013):

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

Em síntese, a FDP é utilizada para calcular a probabilidade de uma variável  $X$  assumir um valor dentro de um intervalo específico  $[a,b]$ . Desde que FDP seja não negativa para todos os valores reais de  $x$  e a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  seja igual a 1, então as probabilidades estão restritas ao intervalo  $0 \leq P(a < X < b) \leq 1$ .

Existe várias FDPs que podem ser utilizadas para modelar a distribuição de uma variável aleatória  $X$ , incluindo a gaussiana (normal), uniforme, exponencial, de Weibull, lognormal e gamma. Além disso, outra forma de descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  é por meio da Função Distribuição Acumulada (FDA), que é uma função  $F(x)$  de um número real  $x$  que fornece a probabilidade de ser menor ou igual a  $x$ .

Durante a SMC, deve-se evitar a repetição de variáveis aleatórias já avaliadas em amostragens anteriores. De acordo com Beck (2019), técnicas de amostragem inteligente são desenvolvidas, como a Amostragem por Hipercubo Latino (LHS, do inglês *Latin Hypercube Sampling*), para reduzir o número de amostras necessárias. Na amostragem LHS, o domínio de cada variável aleatória é dividido em faixas amostradas uma vez, resultando em uma distribuição esparsa e homogênea dos pontos no domínio em problemas multidimensionais (BECK, 2019). Geralmente, a amostragem LHS associada à SMC requer entre 20% e 40 % menos iterações de simulações, mantendo a precisão da SMC sem essa técnica de amostragem (Altabey; Noori; Wang, 2018).

Uma dificuldade da modelagem probabilística de materiais empregados na pavimentação asfáltica está na estimativa das estatísticas associadas às suas variáveis de projeto. Nesse sentido, trabalhos como os da AASHTO (1993), bem como os de Kassem (2017), Altabey, Noori e Wang (2018) e Silvério (2021), fornecem parâmetros estatísticos importantes para a modelagem da mistura asfáltica, incluindo a média, o desvio-padrão, o coeficiente de variação, a distribuição de probabilidade mais adequada, a correlação entre variáveis e os intervalos de confiança, permitindo uma caracterização

mais precisa das propriedades do material. Na ausência desses parâmetros, é comum na engenharia adotar uma distribuição de probabilidade gaussiana com coeficiente de variação estatística (Cov) de 5 % (Altabay; Noori; Wang, 2018). O Cov é uma medida da dispersão nos valores possíveis da variável aleatória em relação à sua média ( $\mu$ ).

Além de considerar as incertezas inerentes nas variáveis mecânicas e viscoelásticas do projeto da mistura asfáltica, uma etapa importante e anterior é identificar as variáveis mais influentes nas respostas do modelo implementado. Essa identificação pode ser realizada empregando a análise de sensibilidade, que auxilia na redução do custo computacional da resolução numérica de modelos probabilísticos, bem como na simplificação de modelos utilizados em análises de otimização, sejam elas mono, multiobjetivo e/ou robustas.

Diversos métodos estatísticos podem ser empregados na análise da sensibilidade, dentre eles: Correlação Linear, Correlação de Posto, Análise de Variância (Anova), Coeficientes de Sensibilidade, Métodos de Decomposição de Variância, Métodos de Sobol, Análise de Componentes Principais (PCA), Métodos de Redução de Dimensionalidade, Regressão Múltipla e Análise de Componentes Independentes (ICA). Este trabalho foca nos dois primeiros métodos estatísticos mencionados: Correlação Linear e Correlação de Posto, os quais foram adotados para analisar a sensibilidade dos parâmetros de entrada em relação à variável de saída.

O Coeficiente de Correlação é uma estatística que relaciona as variáveis de entrada de um modelo ou sistema com as variáveis de saída, sendo calculado a partir dos dados da amostra, representando o parâmetro populacional  $r$ , que varia entre -1 e +1, sendo que -1 indica uma correlação negativa, +1 uma correlação positiva e 0 indica a falta de correlação. Existem basicamente dois tipos principais de coeficientes de correlação: de Pearson (*Linear Correlation*) e de Spearman (*Rank Correlation*), que podem ser calculados com a seguinte equação (Frey; Patil, 2002):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4)$$

Nesse caso,  $n$  corresponde ao tamanho da amostra analisada do processo probabilístico. Para o Coeficiente de Correlação de Pearson (CCP),  $\bar{x}$  é o valor médio da variável aleatória  $X$  do grupo de observações  $[x_1, x_2 \dots x_n]^T$ ,  $\bar{y}$  é o valor médio da variável aleatória  $Y$  do grupo de observações  $[y_1, y_2 \dots y_n]^T$ . Por outro lado, no Coeficiente de Correlação de Spearman (CCS),  $x_i$  e  $y_i$  representam as classificações no grupo de observações correspondentes, enquanto  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são as classificações das médias de  $x_i$  e  $y_i$ , respectivamente.

Segundo Frey, Mokhtari e Zheng (2004), os coeficientes CCP e CCS são empregados no estudo da sensibilidade global de modelos lineares e monotônicos respectivamente. Como pode ser observado na Equação (4), a expressão para o cálculo do CCP e do CCS é similar, exceto pelo ranqueamento dos dados da amostragem no CCS. Em termos de análise, o CCP avalia a força da associação linear entre os valores de entrada e os de saída do modelo, enquanto o CCS mede a força da relação monotônica entre as variáveis aleatórias (randômicas). O CCP pode ser impreciso para modelos não lineares, e o CCS para os modelos não monotônicos.

Neste trabalho, ambos coeficientes são utilizados para a análise de sensibilidade estatística da mistura asfáltica.

No ANSYS APLD, as variáveis de entrada do modelo probabilístico são consideradas insignificantes quando apresentam correlações  $-0,1 < r < 0,1$ . Existem tabelas que estabelecem critérios para interpretar o Coeficiente de Correlação “ $r$ ”: entre 0 e 0,30 a correlação é fraca, entre 0,30 e 0,60 a correlação é regular, entre 0,60 e 0,90 a correlação é forte, entre 0,90 e 1 a correlação é dita muito forte e 1 a correlação é plena ou perfeita (Callegari-Jacques, 2003).

## Materiais e métodos

Os materiais e métodos empregados neste trabalho estão organizados conforme ilustrado da Figura 3, cujas cinco etapas descritas são detalhadas a seguir.

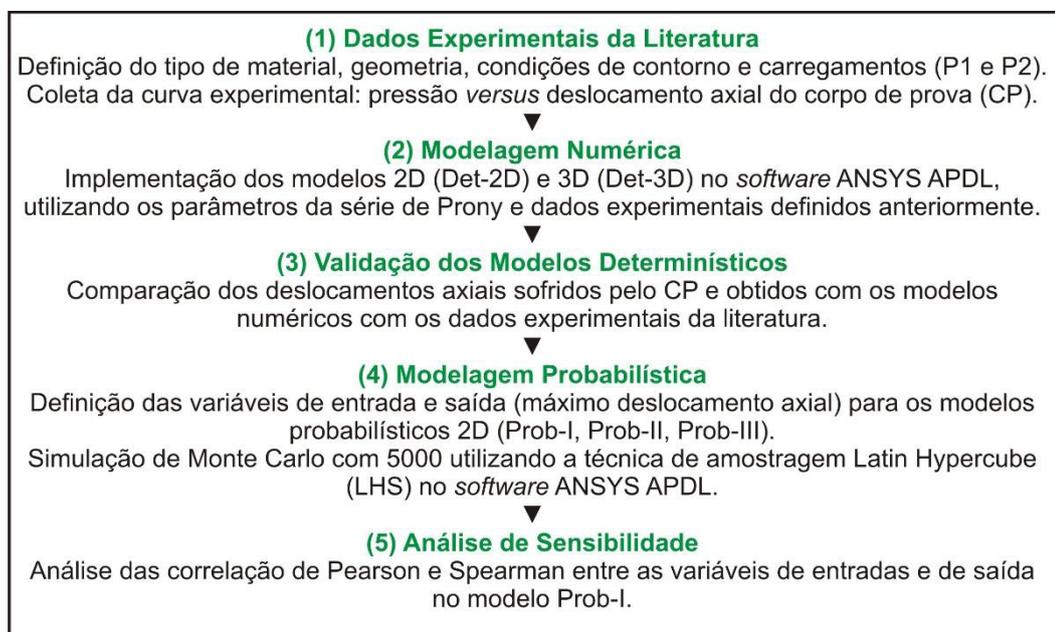


Figura 3 – Fluxograma esquemático das etapas de materiais e métodos empregados no trabalho

Fonte: Elaborado pelos autores.

### (1) Dados experimentais da literatura

O corpo de prova (CP) betuminoso estudado numericamente neste trabalho foi inicialmente proposto por Souza (2010) em seu estudo experimental. Trata-se de um CP cilíndrico de 102 mm de diâmetro (D) e 64 mm de altura (H), conforme ilustrado na Figura 4, em (a).

O corpo de prova betuminoso em estudo, segundo Souza (2010), tem uma densidade de  $1100 \text{ kg/m}^3$  e um coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) constante de 0,30. Trata-se de uma mistura de Cimento Asfáltico de Petróleo (CAP) do tipo 50-70 (CAP 50-70), amplamente utilizada como revestimento em pavimentos asfálticos no Brasil. Como agregado da mistura foi empregado um agregado mineral oriundo de rochas calcárias.

Além disso, segundo Souza (2010), foram adicionadas 4% de fibras sintéticas de aramida à composição para reforço mecânico da matriz da mistura asfáltica estudada. A distribuição granulométrica da mistura, bem como os ensaios necessários para a

caracterização mecânica e física dos constituintes da mistura asfáltica são apresentados no trabalho de Souza (2010). Este trabalho se limitará à apresentação sucinta dos dados do ensaio para a obtenção do módulo de relaxação da mistura asfáltica conduzido por Souza (2010).

No ensaio de fluência conduzido por Souza (2010), foi aplicada uma pré-carga de compressão  $P_1$  de 0,005 MPa durante 10 s (na posição  $y = H$ ), seguida por uma carga de compressão  $P_2$  de 0,1 MPa ao longo de 3600 s (1h). Durante o período total de ensaio (3610 s), o máximo deslocamento axial do CP foi monitorado sob temperatura constante de 25 °C.

No presente trabalho numérico, a pressão resultante dos carregamentos foi aplicada em incrementos de tempo fixo ( $\Delta t$ ) de 10 s. Os coeficientes e módulos da série de Prony foram obtidos do estudo numérico de García *et al.* (2019), que utilizou o software VISCOlab e os dados experimentais de Souza (2010), conforme descrito na Tabela 1.

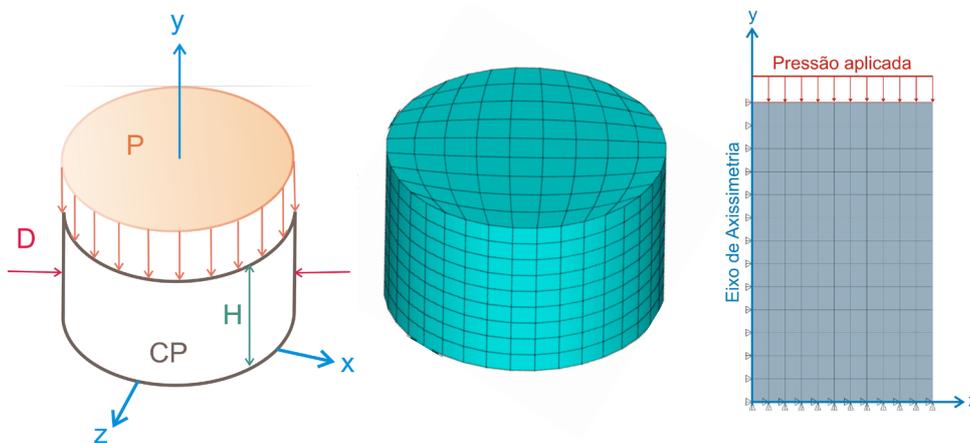


Figura 4 – Corpo de prova de uma mistura betuminosa (a), modelos numéricos 3D (b) e 2D (c) implementados via MEF  
Fonte: Elaborado pelos autores.

O comportamento mecânico do material betuminoso, e conseqüentemente do corpo de prova modelado numericamente, é não linear, pois o módulo de relaxação varia com o tempo e depende do histórico de carregamento ao qual o material foi submetido.

Neste estudo, o comportamento viscoelástico da mistura asfáltica foi modelado matematicamente por meio da série de Prony, conforme indicado na Equação (1), utilizada para determinar o módulo de relaxação  $E(t)$  no domínio do tempo.

Conforme apresentado na Tabela 1, a série de Prony foi representada neste trabalho por quatro termos  $\alpha_i$ , com o índice “i” variando entre 1 e 4, de acordo com os respectivos valores  $\rho_i$ , fornecidos por García *et al.* (2019). Já os valores do módulo  $E_\infty$  e dos coeficientes  $\alpha_i$  e  $\alpha_\infty$  foram determinados nesse trabalho utilizando a Equação (2).

	$\rho_i$	$E_i$	$\alpha_i$
$E_\infty$	7,07 MPa	1	0,875762
$\alpha_\infty$	0,035332	10	0,051574
$E_0$	200,10 MPa	100	0,029535
		1000	0,007796

Tabela 1 – Parâmetros da série de Prony para a mistura asfáltica CAP 50-70

Fonte: Elaborado do pelos autores com base em García *et al.* (2019) (valores do  $\alpha_\infty$ ,  $\alpha_i$ ).

## (2) Modelagem numérica dos modelos determinísticos

O modelo 3D implementado via MEF neste trabalho, denominado **Det-3D**, é ilustrado na Figura 4, em (b). O elemento do tipo sólido, conhecido como Solid65 no ANSYS, foi utilizado em sua modelagem, apresentando quatro nós e três graus de liberdade (gdl) de translação por nó, denominados  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ , conforme direções cartesianas x-y-z ilustradas na Figura 4, em (a). O modelo numérico 3D, ilustrado na Figura 4, em (b), apresenta 3000 gdl e tem como condição de contorno o impedimento de deslocamentos nas direções x, y e z ( $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ) na posição  $z = 0$ .

O modelo numérico 2D implementado via MEF nesse trabalho, chamado **Det-2D**, é ilustrado na Figura 4, em (c), e emprega o princípio da axissimetria para reduzir o tempo de processamento computacional, especialmente necessário na análise probabilística planejada. Foi utilizado um elemento quadrático do tipo plano, denominado Plane182 no ANSYS, composto por quatro nós e dois gdl por nó ( $u_x$  e  $u_y$ ). O modelo numérico 2D ilustrado na Figura 4, em (c), apresenta 672 gdl. Foram aplicadas as seguintes condições de contorno: impedimento dos deslocamentos verticais na direção do eixo x ( $u_y = 0$ ) e imposição do eixo y de axissimetria ( $u_x = 0$ ), conforme ilustrado na Figura 4, em (c).

A discretização da malha dos modelos numéricos 2D e 3D foi realizada por meio de análise de convergência em relação ao deslocamento axial máximo ( $\rho_{\text{máx}}$ ) ao final do ensaio de fluência.

Na modelagem do material viscoelástico no ANSYS APDL, os parâmetros  $\alpha_i$ ,  $\rho_i$  e  $E_{o_i}$ , fornecidos Equação (1), são empregados em detrimento dos parâmetros  $E_p$ ,  $\rho_i$  e  $E_{\infty}$ , apresentados na Equação (2). Desse modo, considerando que a referência da literatura utilizada para obter esses parâmetros utiliza o módulo de relaxação modelado conforme os parâmetros indicados na Equação (1), é necessário fazer uma conversão entre ambas.

## (3) Validação dos modelos determinísticos

Além dos dados experimentais de Souza (2010) relacionados ao máximo deslocamento axial ( $\rho_{\text{máx}}$ ) sofrido pelo corpo de prova em razão do tempo de aplicação das cargas de compressão, este estudo também utiliza para validação determinística os dados numéricos de García *et al.* (2019). Esses dados foram obtidos por meio do software ABAQUS na modelagem determinística do CP.

## (4) Modelagem e simulação probabilística

A Tabela 2 apresenta as estatísticas das variáveis aleatórias de entrada utilizadas no modelo probabilístico implementado neste estudo.

Para cada variável de entrada, são definidos: o tipo de Função de Distribuição de Probabilidade (FDP), sua covariância (Cov) ou seus valores limites (máximo e mínimo). O vetor  $X$  das variáveis aleatórias de entrada do modelo probabilístico é composto pelos termos  $E_o$ ,  $E_{\infty}$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $D$ ,  $H$ ,  $P_1$  e  $P_2$ . Na ausência de fontes bibliográficas que fornecessem valores típicos para as variáveis aleatórias em estudo, adotou-se uma covariância de 5%, conforme indicado por Altabey, Noori e Wang (2018).

Propriedade mecânica e viscoelástica	Média	Cov	Máximo e mínimo	Tipo de distribuição probabilística
$E_0$	200,10 MPa	5 %	-	normal ou lognormal
$E_\infty$	7,07 MPa	5 %	-	normal ou lognormal
$E_i$ , com $i = 1$ a $4$	Tab.1	5 %	-	normal ou lognormal
$\nu$	0,20	5 %	-	normal ou lognormal
$D$	102 mm	-	0,99D; 1,01D	uniforme
$H$	64 mm	-	0,99H; 1,01H	uniforme
$P_1$	0,005 MPa	5 %	-	normal ou lognormal
$P_2$	0,100 MPa	5 %	-	normal ou lognormal

Tabela 2 – Parâmetros estatísticos das variáveis mecânicas e viscoelásticas da mistura asfáltica adotadas nos modelos probabilísticos implementados

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesse estudo, conforme indicado na Tabela 2, uma variação de 5 % foi adotada para todos os parâmetros do vetor de variáveis aleatórias  $X$  (variáveis preditoras), independentemente do tipo de FDP. Assim, foram utilizadas as FDPs dos tipos gaussiana, uniforme e lognormal para as variáveis aleatórias  $X$ . Os tipos de FDP e as covariâncias adotadas seguiram os mesmos padrões apresentados em outros trabalhos sobre a temática, como os de Kassem (2017) e Silvério (2021). Os valores médios utilizados na modelagem probabilística são considerados como os valores nominais. A variável aleatória de saída de interesse nesse estudo (variável dependente) é o máximo deslocamento axial ( $\rho_{m\acute{a}x}$ ) resultante dos carregamentos aplicados durante o ensaio.

Para investigar a influência do tipo de função de probabilidade adotada no modelo probabilístico sobre as respostas do problema em termos de sensibilidade e estatísticas da variável de saída ( $\rho_{m\acute{a}x}$ ), três modelos probabilísticos distintos foram propostos neste trabalho, conforme indicado na Tabela 3.

Tipo de FDP	Modelo probabilístico		
	Prob-I	Prob-II	Prob-III
<b>Gaussiana</b>	$E_0, E_\infty, E_i, \nu$	$n$	$E_0, E_\infty, E_i, \nu, P_1, P_2$
<b>Lognormal</b>	$P_1, P_2$	$E_0, E_\infty, E_i, P_1, P_2$	-
<b>Uniforme</b>	$D, H$	$D, H$	$D, H$

Tabela 3 – Tipos de funções probabilísticas empregadas nas variáveis incertas  $X$  conforme o tipo de modelo

Fonte: Elaborado pelos autores.

O primeiro, chamado de **Prob-I**, considera uma distribuição gaussiana para o material viscoelástico da mistura, lognormal para as cargas aplicadas e uniforme para a geometria do CP da mistura. Outro modelo, chamado **Prob-II**, adota, com exceção do coeficiente de Poisson (gaussiana), uma distribuição do tipo lognormal para os parâmetros do material da mistura e uniforme para a sua geometria. E um terceiro modelo, chamado **Prob-III**, emprega uma distribuição do tipo gaussiana para as variáveis do material viscoelástico e uma distribuição uniforme para as dimensões do CP. Conforme apresentado nas Tabelas 2 e 3, todos os modelos empregam a mesma covariância de 5 % para as variáveis aleatórias  $X$  que assumem distribuições dos tipos gaussiana e lognormal. Além disso, todos os modelos empregam uma variação de 1% em relação aos limites mínimo e máximo adotados para as dimensões geométricas do corpo de prova ( $H$  e  $D$ ), utilizando uma distribuição uniforme.

## (5) Análise de sensibilidade

Para estudar a sensibilidade dos parâmetros de entrada e da variável de saída, são adotadas a Correlação Linear de Pearson e a Correlação de Posto de Spearman, representadas matematicamente por meio da Equação (4).

O máximo deslocamento axial sofrido pelo CP em razão do tempo é utilizado nas simulações probabilísticas como o vetor das variáveis aleatórias de saída de interesse.

Já a análise da sensibilidade das variáveis  $X$  é realizada em relação ao máximo deslocamento axial sofrido pelo CP ao final do ensaio ( $t = 3610$  s).

O número de amostras empregadas na Simulação de Monte Carlo é fixado em 5000, utilizando a técnica de amostragem LHS.

## Resultados e discussão

A Figura 5 mostra a variação do módulo de relaxação  $E(t)$  implementando conforme a Equação (1), utilizada no trabalho de García *et al.* (2019), e comparada com a Equação (2), implementada neste trabalho.

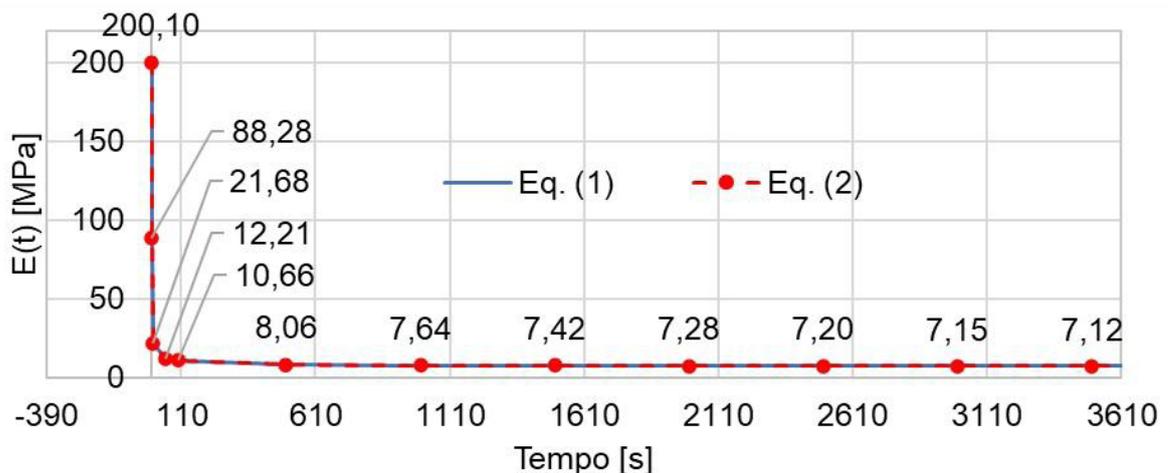


Figura 5 – Variação do módulo de relaxação da mistura asfáltica com o tempo, empregando formulações matemáticas distintas

Fonte: Elaborado pelos autores.

Observa-se na Figura 5 a correspondência dos gráficos obtidos entre ambas as equações na representação do módulo de relaxação  $E(t)$ . Além disso, pode-se constatar que entre 0 e 100 s, ocorre uma redução brusca no valor do módulo de relaxação  $E(t)$ , que se reduz de maneira menos brusca até o final do tempo analisado.

A rápida perda de rigidez inicial do material viscoelástico, indicada na Figura 5, pode gerar deformações significativas sob cargas imediatas, como o tráfego de veículos. No entanto, essa queda rápida sugere que a mistura pode acomodar as tensões iniciais, reduzindo o risco de trincas prematuras. Após esse período inicial, a estabilização subsequente do módulo de relaxação indica que a mistura mantém rigidez suficiente para suportar cargas contínuas no decorrer do tempo. Esses resultados são importantes para o projeto e a seleção de materiais, determinação da espessura do pavimento e estratégias de manutenção, influenciando diretamente a durabilidade e a vida útil do pavimento.

Outra implicação dos dados ilustrados na Figura 5 é que, quando o fluxo de tráfego é intenso e os veículos circulam em alta velocidade sob o revestimento asfáltico, a rápida perda inicial de rigidez da mistura asfáltica facilita a acomodação das tensões, o que reduz o risco de deformações excessivas e trincas. Por outro lado, no caso de tráfego lento (como o de caminhões ou em congestionamentos com cargas repetidas de baixa frequência), a carga prolongada pode causar deformações mais significativas, apesar da estabilização subsequente da rigidez. Assim, o tráfego intenso tende a ser menos prejudicial, enquanto tráfego lento aumenta o risco de danos, demandando mais atenção na seleção de materiais e na manutenção do pavimento.

A Figura 6 ilustra a distribuição do máximo deslocamento axial ( $\rho_{\max}$ ), em módulo, sofrido pelo CP em razão do tempo de ensaio, obtidos empregando os dados experimentais de Souza (2010), os numéricos de García *et al.* (2019) e utilizando os resultados empregados nos modelos 2D e 3D implementados no presente trabalho.

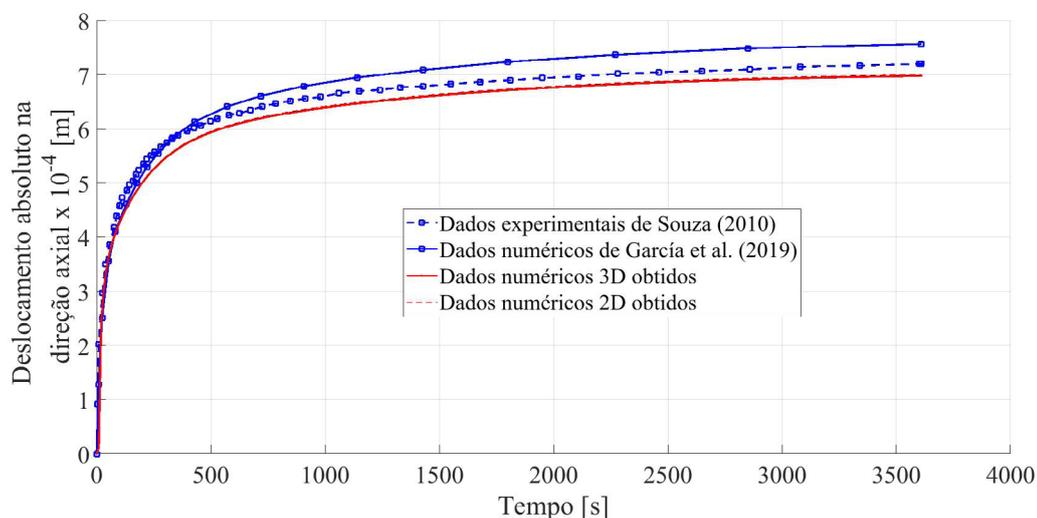
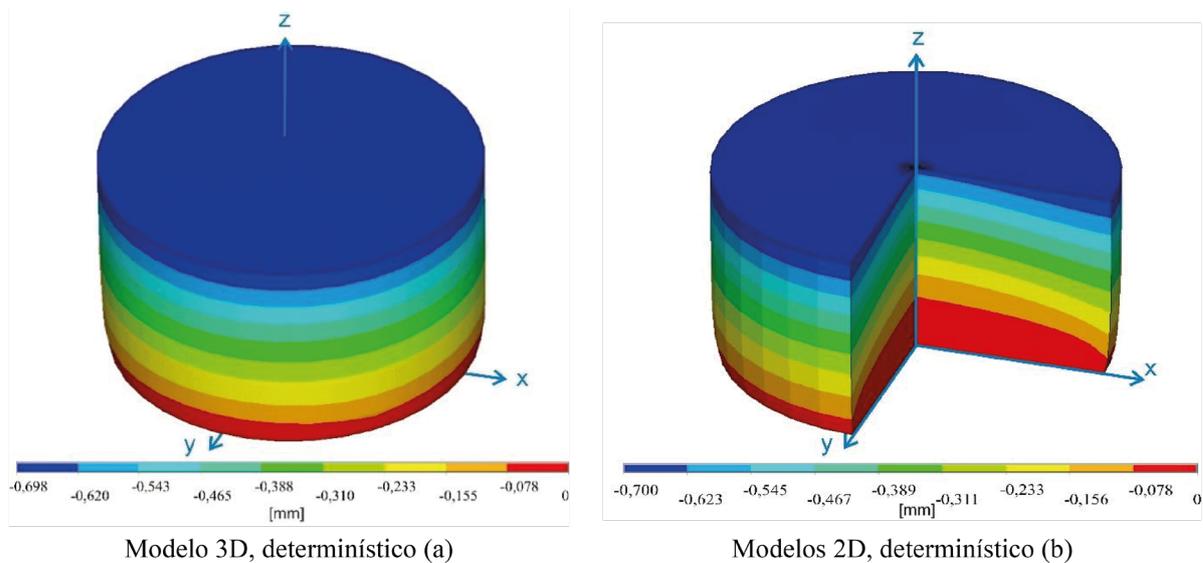


Figura 6 – Máximo deslocamento axial no decorrer do tempo da mistura CAP 50-70 obtida empregando diferentes modelos

Fonte: Elaborado pelos autores com base em Souza (2010) e García et al. (2019) (dados numéricos 2D e 3D).

Os resultados ilustrados na Figura 6 indicam que ambos os modelos numéricos implementados neste trabalho (2D e 3D) reproduzem os dados do ensaio experimental de fluência conduzido por Souza (2010), conforme a correspondência entre os deslocamentos máximos observados e os valores obtidos nos modelos numéricos.

O campo de deslocamentos verticais do CP betuminoso no instante de tempo final de 3610 s, obtido por meio de modelos numéricos 3D e 2D, são ilustrados na Figura 7, na qual (a) representa o modelo 3D e (b) o modelo 2D.



**Figura 7 – Campo dos deslocamentos mecânicos ao longo do eixo axial do CP obtido ao final do carregamento aplicado, empregando os modelos 3D (a) e 2D (b)**

Fonte: Elaborado pelos autores.

A Figura 7, em (a) e (b), mostra que o máximo deslocamento vertical sofrido pelo corpo de prova no modelo 3D, ao final dos 3610 s de aplicação do carregamento, é igual a -0,698 mm, ao passo que no modelo determinístico 2D o valor obtido foi de -0,700 mm, ocorrendo no topo do corpo de prova.

A Tabela 4 apresenta o máximo deslocamento axial (em módulo) que ocorre ao longo do eixo axial do CP ao final do ensaio ( $\rho_{\text{máx}}$ ), obtidos experimentalmente por Souza (2010) **ref.1**, empregando o modelo numérico de García *et al.* (2019) **ref. 2** e usando os modelos determinísticos (2D e 3D) e estocástico (2D) implementados neste trabalho. São fornecidos o valor médio da variável de saída ( $\rho_{\text{máx}}$ ) e o seu desvio padrão ( $\sigma$ ), obtidos ao final do ensaio, considerando um nível de confiança de 95%. Também é fornecida nessa tabela a diferença percentual entre os valores obtidos pelos modelos determinísticos em relação ao valor experimental, utilizando como referência os dados experimentais da referência **ref.1**.

Modelo	$\rho_{\text{máx}}$ (mm)	Diferença Percentual (%)	$\rho_{\text{médio}}$ (mm)	$\sigma$ (mm)
Experimental de Souza (2010), ref.1	0,720	-	-	-
Numérico de García <i>et al.</i> (2019), ref.2	0,757	5,14 %	-	-
Numérico (determinístico) 2D, Det-2D	0,700	2,78 %	-	-
Numérico (determinístico) 3D, Det-3D	0,698	3,06 %	-	-
Numérico 2D probabilístico, Prob-I	-	-	0,704	0,068
Numérico 2D probabilístico, Prob-II	-	-	0,704	0,068
Numérico 2D probabilístico, Prob-III	-	-	0,704	0,067

Tabela 4 – Comparação entre os modelos numéricos determinísticos, probabilísticos e experimentais dos valores do máximo deslocamento axial obtido ao final do ensaio

Fonte: Elaborado pelos autores com base em Souza (2010) e García *et al.* (2019) (modelos determinísticos 2D e 3D, e modelos probabilísticos Prob-I, Prob-II e Prob-III).

Ao comparar os dados numéricos obtidos utilizando o modelo determinístico 2D (**Det-2D**) com os dados experimentais de Souza (2010) **ref.1**, observa-se uma maior semelhança qualitativa do que os de García *et al.* (2019) **ref.2**. A discrepância percentual do

máximo deslocamento axial obtido empregando os modelos numéricos 2D (**Det-2D**) e 3D (**Det-2D**) em relação ao valor experimental é de 2,78% e 3,06% respectivamente. Entretanto, é importante destacar que ambos os modelos estão dentro da margem definida pelo desvio padrão obtido empregando os modelos probabilísticos **Prob-I**, **Prob-II** e **Prob-III**, que apresentam máximo deslocamento axial médio ( $\rho_{\text{médio}}$ ) de 0,704 mm e desvios padrões de 0,068 mm, 0,068 mm e 0,067 mm respectivamente.

A Figura 8 apresenta, em (a), os valores do deslocamento axial máximo ( $\rho_{\text{máx}}$ ) obtidos utilizando o modelo probabilístico **Prob-I**, conforme o número de amostras usadas na Simulação de Monte Carlo, com um nível de significância de 2,5%.

A Figura 8 mostra a convergência do valor médio de  $\rho_{\text{máx}}$  de acordo com o aumento do número de amostras da simulação, evidenciando a constância do desvio padrão ao longo do final da simulação realizada. Por outro lado, a Figura 8 ilustra, em (b), o histograma do módulo  $E_0$ , em (c) o histograma da altura  $H$  da mistura viscoelástica e em (d) o histograma da pressão  $P_2$ , obtidos empregando o modelo **Prob-I**, com um nível de confiança de 95%. Esses três histogramas refletem, de forma visual, os dados gerados pela Simulação de Monte Carlo no software ANSYS-APDL, com base nas estatísticas (tipo de distribuição de probabilidade, covariância ou valores limites, no caso da distribuição uniforme) apresentadas na Tabela 2.

A Figura 9 ilustra, em (a) e (b), apresenta as sensibilidades do vetor das variáveis preditoras  $X$  em relação à variável dependente  $\rho_{\text{máx}}$  (em  $t = 3010$  s), utilizando respectivamente os Coeficientes de Correlação de Pearson (CCP) e o de Spearman (CCS), com um nível de significância de 2,5%.

Pela Figura 9, em (a) e em (b), também pode-se verificar, em ordem crescente de significância, que as variáveis mais significativas da mistura betuminosa são:  $E_0$ ,  $P_2$ ,  $E_\infty$ ,  $E_1$ ,  $\nu$  e  $H$ . As demais variáveis aleatórias não apresentam significância relevante, conforme estatísticas empregadas. Dentre as variáveis aleatórias mais significativas (com correlação regular entre 40 e 60),  $E_0$  e  $E_\infty$  apresentam correlação negativa com a variável de dependente  $\rho_{\text{máx}}$ , contribuindo, portanto, para a sua diminuição, enquanto as demais ( $P_2$  e  $E_1$ ) apresentam correlação positiva.

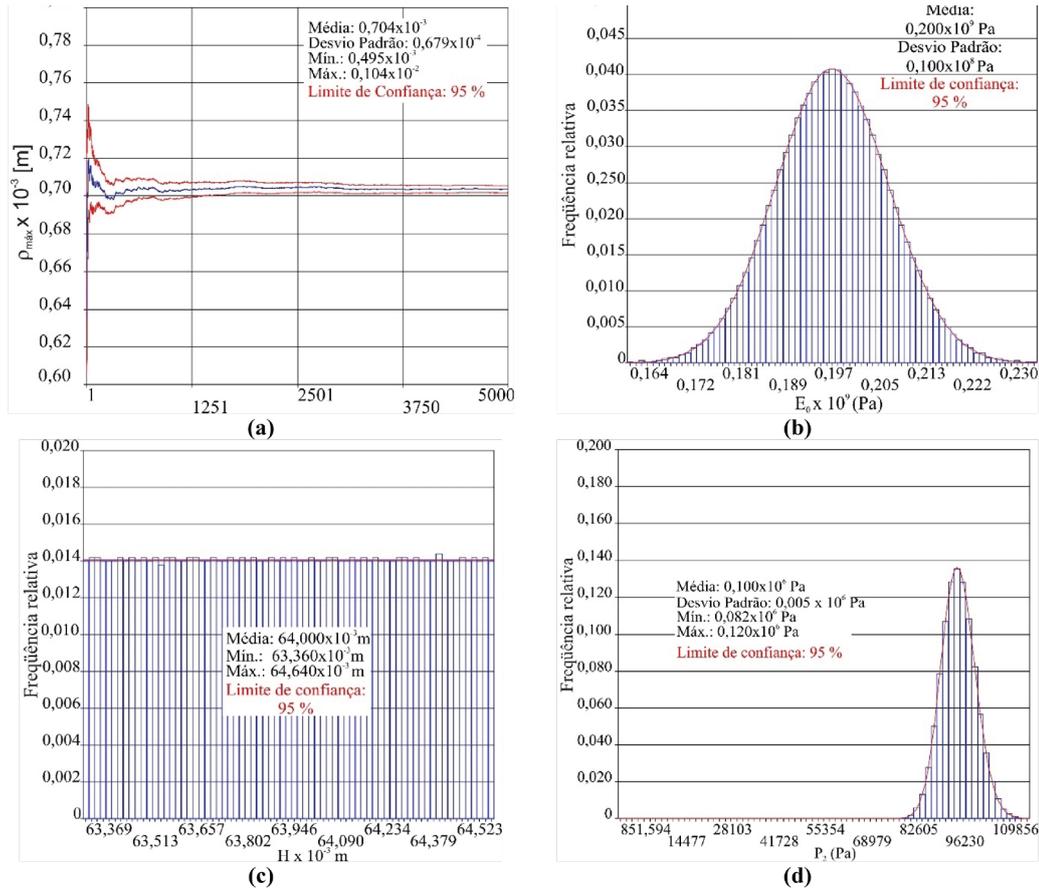


Figura 8 – Histograma da variável de saída  $r_{\max}$  (a) e das de entrada  $E_0$  (b),  $H$  (c) e  $P_2$  (d) empregando o modelo Prob-I com um nível de confiança de 95%

Fonte: Elaborado pelos autores.

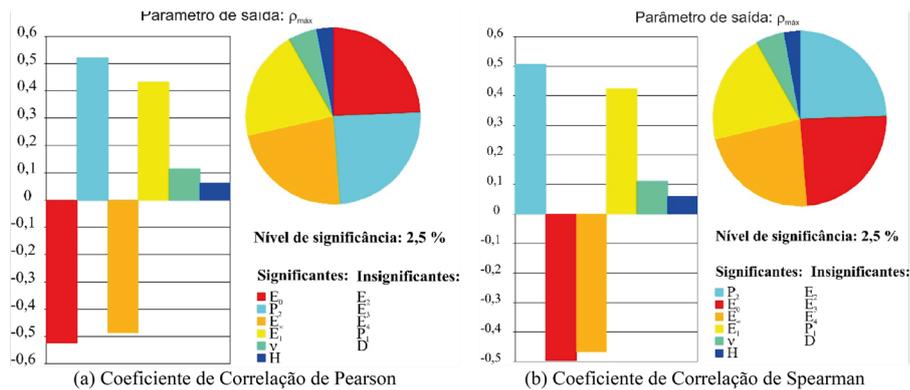


Figura 9 – Sensibilidade dos parâmetros aleatórios  $X$  em relação à variável dependente  $r_{\max}$ , obtida empregando o modelo Prob-I com um nível de significância de 2,5%

Fonte: Elaborado pelos autores.

Conforme observado na Figura 9, independentemente do tipo de teoria empregada na formulação da sensibilidade (Pearson ou Spearman), ambas as correlações apresentam o mesmo comportamento físico de tendência da correlação (positiva ou negativa) existente entre as variáveis predictoras analisadas em relação à variável dependente  $\rho_{\max}$ , sendo observado apenas a troca da ordem de significância das variáveis  $E_0$  e  $P_2$ .

A Figura 10, em (a) e (b), ilustra as correlações entre as variáveis aleatórias  $E_0$  e  $E_1$ , respectivamente negativa e positiva, em relação a  $\rho_{m\acute{a}x}$ , obtidas empregando o modelo **Prob-I**. Observa-se que os coeficientes de correlação de Spearman e de Pearson negativos correspondem, respectivamente, a uma tendência (monotônica ou linear) decrescente entre  $E_0$  e  $\rho_{m\acute{a}x}$ , enquanto  $E_1$  e  $\rho_{m\acute{a}x}$  apresentam uma tendência crescente entre essas duas variáveis aleatórias.

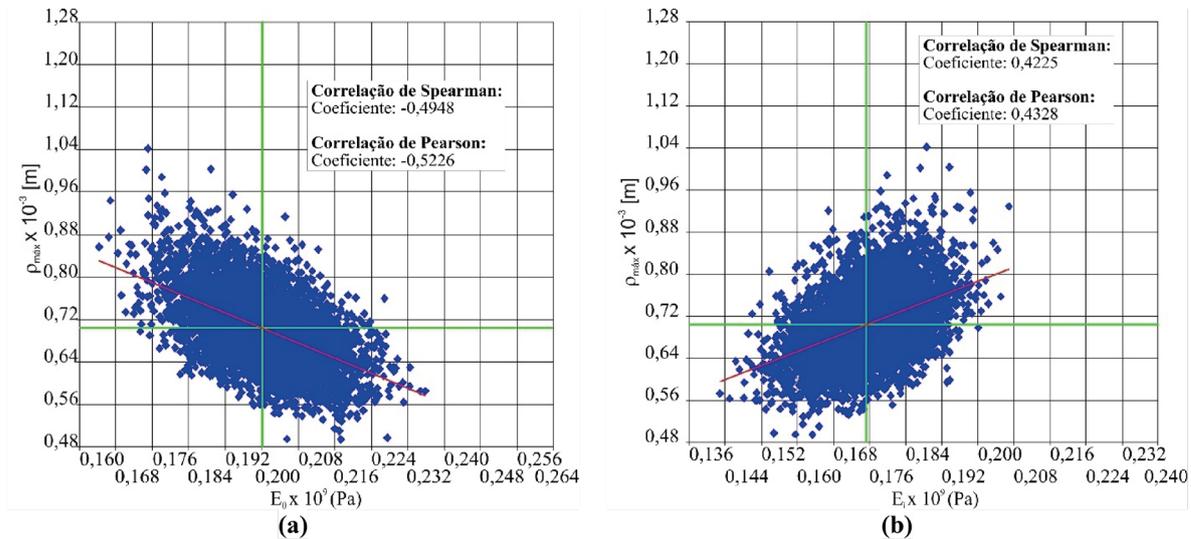


Figura 10 – Correlação dos parâmetros  $E_0$ , (a) e  $E_1$ , (b) do módulo de relaxação da mistura betuminosa em relação ao seu máximo deslocamento axial, adotando o modelo Prob-I com nível de confiança de 95%  
 Fonte: Elaborado pelos autores.

A Tabela 5 fornece a sensibilidade das variáveis aleatórias  $X$  mais significativas em relação a variável  $\rho_{m\acute{a}x}$ , empregando os três modelos probabilísticos implementados nesse trabalho. Na tabela são fornecidos os coeficientes de correlação de Pearson (CCP) e de Spearman (CCS), empregando um nível de significância de 2,5%.

Os dados apresentados na Tabela 5 sugerem que as propriedades do material betuminoso, representadas por  $E_0$ ,  $E_\infty$ ,  $E_1$  e  $\nu$ , exercem uma influência significativa sobre o máximo deslocamento axial da mistura betuminosa, enquanto a altura da mistura ( $H$ ) parece ter uma influência menor. Tanto o CCP quanto o CCS produzem resultados semelhantes em termos de direção e magnitude da correlação. No entanto, os CCPs resultaram em valores ligeiramente superiores aos obtidos pelo CCS.

Modelos	Correlações	$P_2$	$E_0$	$E_\infty$	$E_1$	$\nu$	$H$
Prob-I	CCP	0,520	-0,523	-0,487	0,433	0,114	0,064
Prob-I	CCS	0,506	-0,495	-0,466	0,422	0,110	0,059
Prob-II	CCP	0,508	-0,525	-0,475	0,461	0,093	0,062
Prob-II	CCS	0,491	-0,511	-0,460	0,444	0,090	0,057
Prob-III	CCP	0,507	-0,522	-0,500	0,425	0,114	0,078
Prob-III	CCS	0,499	-0,507	-0,487	0,407	0,111	0,071

Tabela 5 – Coeficientes de correlação das variáveis aleatórias mais significantes em relação ao máximo deslocamento axial da mistura, obtidos com os modelos probabilísticos implementados, considerando um nível de significância de 2,5%  
 Fonte: Elaborado pelos autores.

A Figura 11 ilustra, em (a), a Função Distribuição Acumulada (FDA) da variável dependente  $\rho_{\text{máx}}$ , enquanto em (b) é apresentado o seu histograma, obtidos ao final da simulação probabilística utilizando o modelo **Prob-I**, com um nível de confiança de 95%. Além disso, a Figura 11 também ilustra, em (c) e em (d), os histogramas obtidos da variável aleatória  $\rho_{\text{máx}}$  ao final da simulação probabilística ( $t = 3610$  s) para os modelos **Prob-II** e **Prob-III**, com um nível de confiança de 95%.

Desse modo, por meio da Figura 11, em (a), e dos dados obtidos diretamente no software utilizado na modelagem probabilística, pode-se afirmar com 90% de probabilidade, por exemplo, que  $\rho_{\text{máx}}$  é menor ou igual a 0,792 mm ( $P_r(x \leq a)$ ), com uma faixa de variação entre 0,788 mm e 0,795 mm. Ademais, também há uma probabilidade de 61,809%, variando entre 60,457 e 63,150 mm, de que  $\rho_{\text{máx}}$  seja menor que o valor determinístico obtido experimentalmente (0,720 mm) por Souza (2010), com um nível de significância de 2,5%.

Embora não forneça uma confirmação direta da normalidade ou log-normalidade dos dados, as curvas (Dist. gaussiana e Dist. log-normal) traçadas na Figura 11, em (b), (c) e (d), podem ajudar a identificar padrões consistentes com essas distribuições. Assim, por meio das curvas traçadas, observa-se que a variável dependente  $\rho_{\text{máx}}$  apresenta uma distribuição achatada (curtose maior que 3) e mais próxima da log-normal que do que da gaussiana. Isso sugere que, independentemente das estatísticas empregadas nesse trabalho para a obtenção das respostas do problema, a variável aleatória apresenta o mesmo tipo de distribuição e características semelhantes. Esse padrão é corroborado pelo trabalho de Kassen (2017), que analisou depressões longitudinais (*rutting*) em pavimentos betuminosos e examinou uma distribuição semelhante do tipo logarítmica. No entanto, esses autores também observaram que a distribuição das depressões longitudinais pode variar dependendo do tipo de mistura betuminosa, podendo também apresentar uma distribuição do tipo normal.

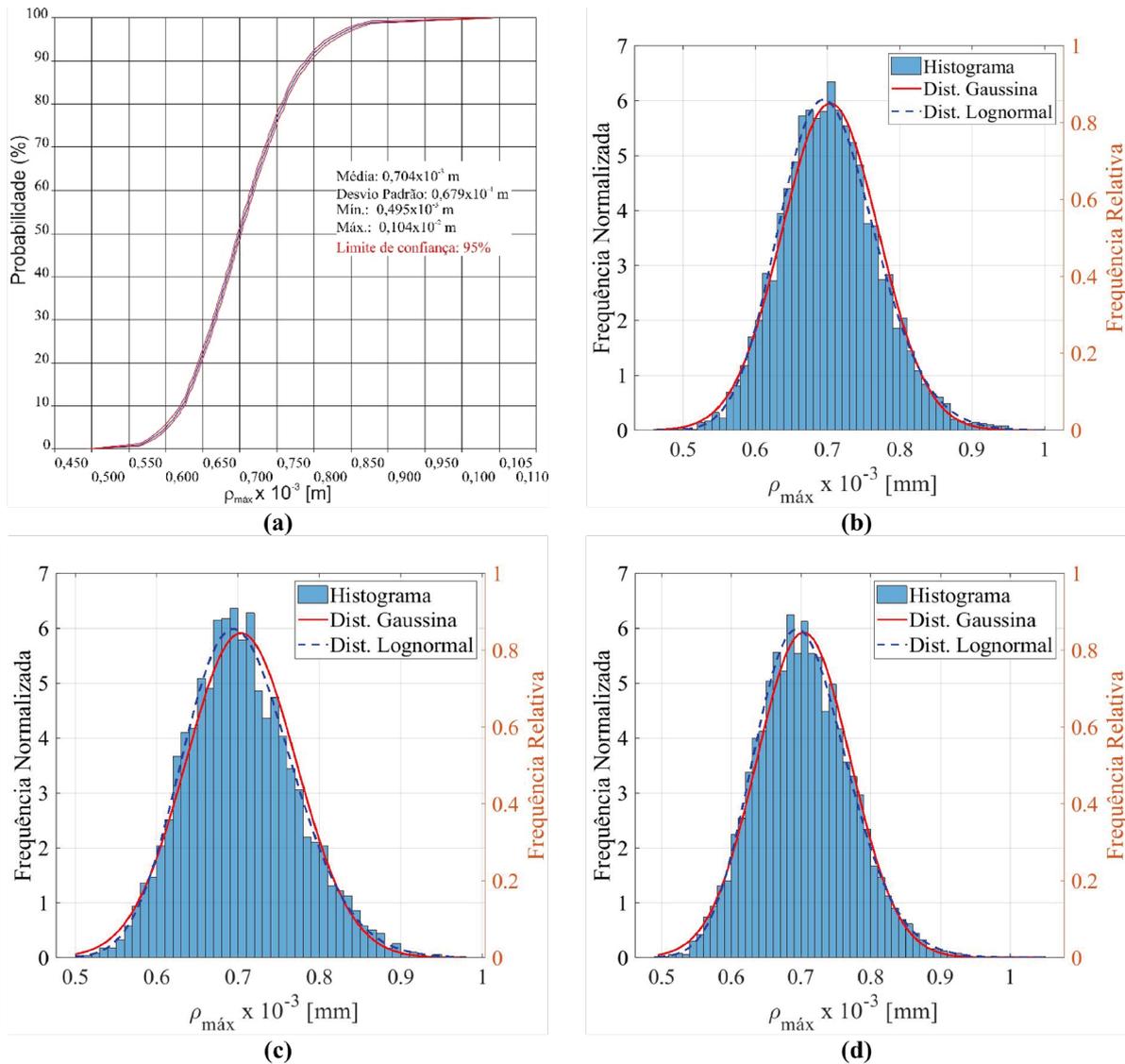


Figura 11 – FDA da variável de saída empregando o modelo Prob-I (a) e seus histogramas obtidos empregando os modelos Prob-I (b), Prob-II (c) e Prob-III (d)

Fonte: Elaborado pelos autores.

A Figura 12 demonstra a probabilidade média, com 95% de confiança, do deslocamento axial  $\rho_{\text{máx}}$  ser menor ou igual ao percentil associado a cada uma das oito curvas traçadas.

Cada uma das curvas ilustradas na Figura 12 corresponde a um diferente percentil ( $P_r = 2,5 \%$ ,  $10 \%$ ,  $30 \%$ ,  $50 \%$ ,  $70 \%$ ,  $90 \%$ ,  $95 \%$  e  $97,5 \%$ ). O valor do deslocamento axial associado a cada uma dessas curvas é obtido empregando a Função Densidade Acumulada (FDA), com nível de confiança de 95%, e o modelo **Prob-I**. Por exemplo, a curva  $P_r = 97,5 \%$ , representa com 97,5% de probabilidade que os deslocamentos axiais do CP são menores ou iguais aos apresentados pela curva correspondente. Resultados semelhantes aos da Figura 12 foram obtidos para os outros modelos **Prob-II** e **Prob-III** implementados; no entanto, não serão apresentados neste trabalho.

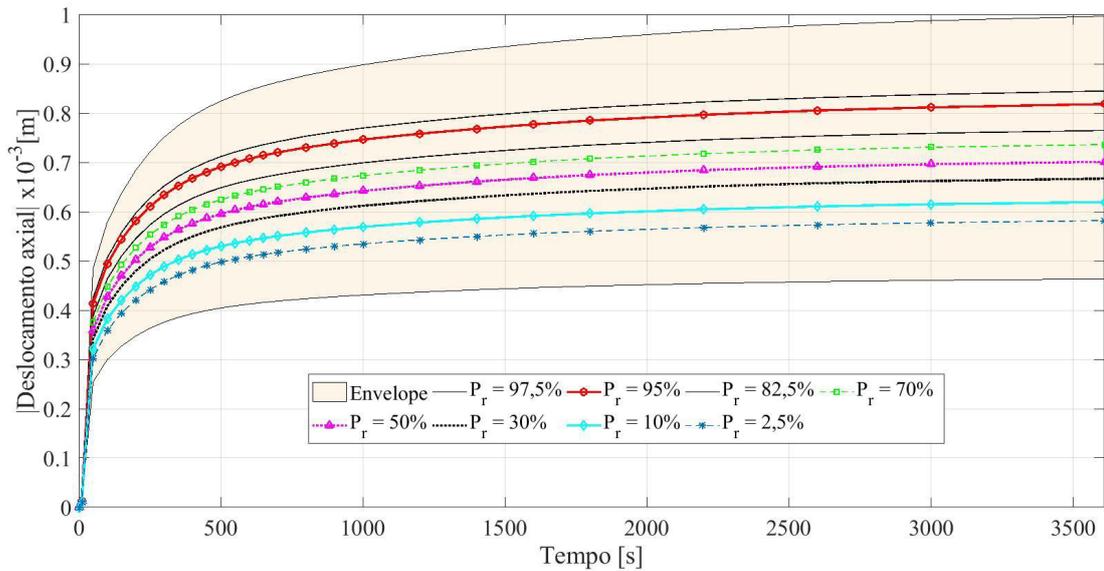


Figura 12 – Probabilidades, ao longo do tempo, de os deslocamentos axiais do CP serem menores que os valores indicados pelas curvas correspondentes, utilizando o modelo Prob-I com 2,5% de significância  
 Fonte: Elaborado pelos autores.

Observa-se também pela Figura 12 que o envelope do máximo deslocamento axial sofrido pelo CP aumenta ao longo do tempo de análise.

A Figura 13 representa a distribuição do Coeficiente de Variação (CV) no decorrer do tempo para cada percentil avaliado na Figura 12. O CV foi calculado segundo a expressão “intervalo/médiamx100”, sendo o “intervalo” definido pela diferença entre os limites máximo e mínimo do deslocamento axial sofrido pelo CP.

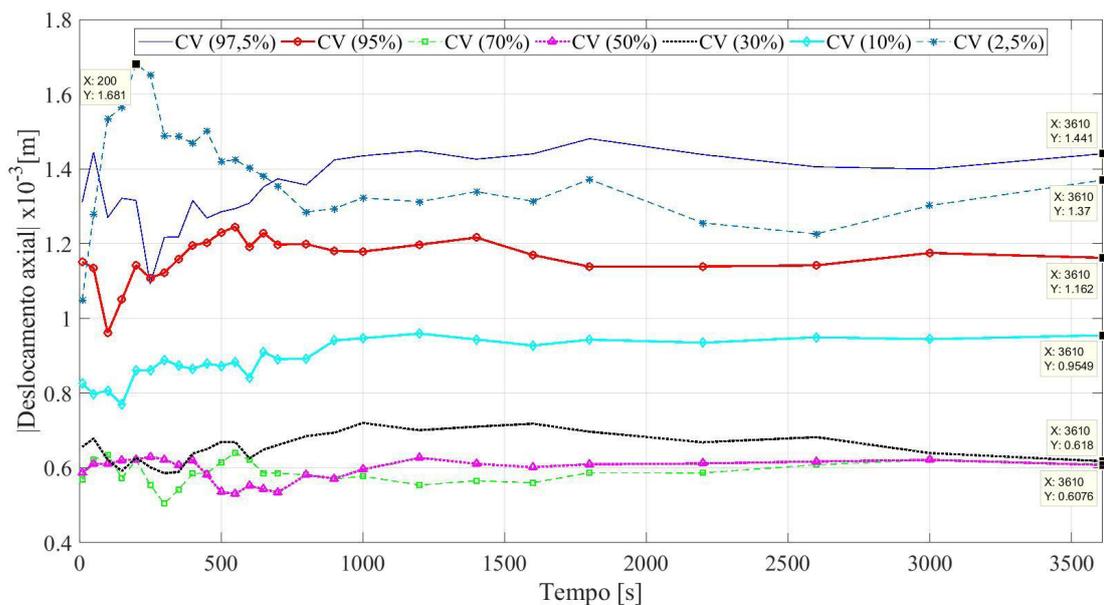


Figura 13 – Coeficiente de Variação em razão do tempo, considerando 2,5% de significância e modelo Prob-I  
 Fonte: Elaborado pelos autores.

Conforme ilustrado na Figura 13, ao considerar o CV associado à probabilidade de 50% como referência, verifica-se que ele aumenta à medida que as porcentagens se afastam dessa média e tendem a se aproximar dela para valores mais semelhantes. Por exemplo, para  $Pr = 97,5\%$  e  $Pr = 2,5\%$ , o CV final foi de  $1,441\%$  e  $1,37\%$  respectivamente, enquanto para  $Pr = 70\%$  e  $Pr = 30\%$  o CV é de  $0,608\%$  e  $0,618\%$  respectivamente. Além disso, nota-se que os valores de CV ao final das simulações ( $t = 3610$  s) são pequenos, no máximo  $1,441\%$ , o que indica uma baixa dispersão ou variabilidade dos dados em relação aos valores médios de cada porcentagem estudada. Os maiores CVs são encontrados para probabilidade  $Pr$  igual  $97,5\%$  e  $2,5\%$ , ou seja, para os valores limites de confiança.

## Considerações finais

Os modelos 2D e 3D implementados numericamente por meio do MEF neste estudo, foram capazes de captar a variação não linear do máximo deslocamento axial ( $\rho_{\max}$ ) em um corpo de prova betuminoso sujeito a uma pressão de compressão até  $3610$  s, com temperatura mantida constante de  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Esses resultados foram comparados e validados com dados experimentais da literatura. Diante disso, o modelo 2D foi selecionado para a análise probabilística em virtude de seu menor custo computacional na resolução do problema, de natureza não linear, relacionado ao comportamento do material.

Os dados numéricos obtidos via modelos 2D e 3D revelaram uma discrepância percentual pequena nos valores do máximo deslocamento axial do CP ao final das simulações determinísticas, de  $2,77\%$  para o modelo 2D e  $3,06\%$  para o 3D em relação ao valor experimental observado na literatura ( $0,720$  mm). Por outro lado, o modelo que incorpora incertezas (material, mecânica e geométrica) nas variáveis do projeto, resultou em um valor médio de deslocamento  $0,704$  mm, com um desvio padrão de no máximo  $0,068$  mm.

A análise de sensibilidade destacou a forte dependência do máximo deslocamento axial da mistura asfáltica quanto ao módulo de relaxação  $E(t)$  do material viscoelástico, sobretudo do módulo de relaxação inicial ( $E_0$ ), do módulo de relaxação à frequência infinita ( $E_{\infty}$ ) e do primeiro parâmetro da série de Prony ( $E_1$ ). Observou-se que tanto a correlação de Pearson (CCP) quanto a correlação de Spearman (CCS) produziram resultados semelhantes em termos de direção e magnitude da correlação entre as variáveis preditoras e a variável dependente.

Além disso, as estatísticas associadas aos tipos mais prováveis de distribuições probabilísticas da variável dependente mostraram que uma distribuição lognormal, platicúrtica – ou seja, uma distribuição com caudas mais leves do que a normal, como observado diretamente nos histogramas obtidos – é a que melhor se adequa à mistura asfáltica em estudo. Os resultados probabilísticos também indicaram uma pequena dispersão dos dados em relação ao  $\rho_{\max}$  obtido, com baixos coeficientes de variação, o que sugere uma consistência e previsibilidade nos valores.

Uma das contribuições deste estudo consiste na inclusão de incertezas nos parâmetros mecânicos – tanto no nível do material quanto das cargas aplicadas – e geométricos de um corpo de prova betuminoso, levando a sua modelagem mais realista e uma análise mecânica mais robusta. Essa abordagem pode aprimorar o projeto de pavimentos asfálticos, utilizando misturas cujo comportamento mecânico sob cargas provenientes do tráfego de veículos no decorrer do tempo é mais previsível. Isso pode

resultar em maior confiabilidade, segurança para os usuários e redução de custos de manutenção da infraestrutura viária.

Como perspectiva para futuras pesquisas, sugere-se investigar a influência dos constituintes da mistura asfáltica em seu comportamento mecânico e viscoelástico, considerando diversas condições de frequência de excitação e fatores ambientais, como o gradiente térmico. Além disso, a aplicação de técnicas de otimização dos constituintes do material da mistura asfáltica, como volume de agregados, betume, *filler* e fibras, combinada com a modelagem estocástica, pode proporcionar projetos de pavimentos asfálticos mais robustos e sustentáveis. Assim, considerando a possibilidade de estudar o uso de materiais sustentáveis em suas composições – como resíduos de construção e rejeitos de mineração como agregado –, com maior durabilidade, o que reduz a necessidade de manutenção e substituição frequente durante a vida útil do pavimento; menor emissão de carbono, em razão da redução no volume do ligante asfáltico e da menor demanda por reparos, e com maior capacidade de manter sua funcionalidade e segurança em condições adversas, como temperaturas mais altas ou baixas de trabalho.

## Referências

- ALTABEY, W. A.; NOORI, M.; WANG, L. *Using ANSYS for finite element analysis, Volume II: dynamic, probabilistic design and heat transfer analysis*. 1. ed. New York: Momentum Press, 2018.
- AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. *Guide for design of pavement structures*. Washington D. C.: AASHTO, 1993.
- BECK, A. T. *Confiabilidade e segurança das estruturas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.
- BERNUCCI, L. B.; MOTTA, L. M. G.; CERATTI, J. A. P.; SOARES, J. B. *Pavimentação asfáltica: formação básica para engenheiros*. 2. ed. Rio de Janeiro: Abeda, 2022.
- CALLEGARI-JACQUES, S. M. *Bioestatística: princípios e aplicações*. 1. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2003.
- CARO, S.; CASTILHO, D.; SÁNCHEZ-SILVA, M. A. A methodology to model the uncertainty of material properties in asphalt pavements. *Journal of Materials in Civil Engineering*, [s. l.], v. 3, n. 26, 2013.
- CHEN, F.; BALIEU, R.; KRINGOS, N. Thermodynamics-based finite strain viscoelastic-viscoplastic model coupled with damage for asphalt material. *International Journal of Solids and Structures*, [s. l.], v. 129, p. 1-13, 2017.
- CHRISTENSEN, R. M. *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. 2. ed. New York: Academic Press, 2003.

FARIA, A. W.; GARCIA, P. R. Estudo numérico de um pavimento de concreto asfáltico considerando revestimento viscoelástico ou elástico-linear. *Revista de Engenharia e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 15, n. 1, 2023.

FREY, H. C.; MOKHTARI, A.; ZHENG, J. *Recommended Practice Regarding Selection, Application, and Interpretation of Sensitivity Analysis Methods Applied to Food Safety Process Risk Models*. Washington, D. C.: U. S. Department of Agriculture, 2004.

FREY, H. C.; PATIL, S. R. Identification and Review of Sensitivity Analysis Methods. *Risk Analysis*, [s. l.], v. 22, n. 3, p. 553-578, 2002.

GARCÍA, L. M.; FARIAS, M. M.; RE CAREY, C. M.; SOUZA, M. V. R. Estudo numérico das propriedades viscoelásticas no domínio do tempo em misturas asfálticas do tipo CPA. *RIPE*, [s. l.], v. 5, 2019.

KASSEM, H. A. Probabilistic characterization of the viscoelastoplastic behavior of asphalt-aggregate mixtures. 2017. Dissertation (Ph. D.) — University of Beirut, Beirut, 2017.

LAKES, R. *Viscoelastic Materials*. New York: Ed. Cambridge University Press, 2009.

LIU, Q.; HU, J.; LIU, P.; WU, J.; LEISCHNER, S.; OESER, M. Uncertainty analysis of in-situ pavement compaction considering microstructural characteristics of asphalt mixtures. *Construction and Building Materials*, [s. l.], v. 279, 2021.

MEDINA, J.; MOTTA, L. M. G. *Mecânica dos Pavimentos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Ed. Interciência, 2015.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.; HUBELE, N. P. *Estatística aplicada à engenharia*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

PINTO, S.; PINTO, I. E. *Pavimentação Asfáltica – Conceitos Fundamentais sobre materiais e revestimentos*. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2015.

POKORSKI, P.; RADZISZEWSKI, P.; SARNOWSKI, M. Study of High-Temperature Properties of Asphalt Mixtures Used for Bridge Pavement with Concrete Deck. *Materials*, [s. l.], v. 14, 2021.

PORTELA, E. L.; PARENTE JUNIOR; E., BOTELHO, R. P.; HOLANDA, A. S. Análise Viscoelástica de pavimentos asfálticos pelo método dos elementos finitos. *In: XXII*

CONGRESSO DE PESQUISA E ENSINO EM TRANSPORTES DA ANPET, 2008, Fortaleza. *Anais [...]*. Fortaleza: ANPET, 2008, p. 1484-1495.

RABELO, K. R.; BABADOPULOS, L. F. A.; SOARES, J. B. C. Caracterização de rigidez de misturas asfálticas por meio de ensaios não destrutivos. *In: 34º CONGRESSO DE PESQUISA E ENSINO EM TRANSPORTE DA ANPET, 2020, Ceará. Anais [...]*. Ceará: ANPET, 2020, p. 1356-1359.



SILVÉRIO, L. C. *Análise empírico-mecânica de pavimento asfáltico para verificação da influência dos módulos resilientes nos parâmetros de deformabilidade das camadas do pavimento e subleito*. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) — Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, 2021.

SOUZA, M. V. R. *Efeito de fibras sintéticas nas propriedades de ligantes e concretos asfálticos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) — Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

TORQUATO E SILVA, S. A.; VIDAL, P. J. F.; HOLANDA, A. S.; PARENTE JÚNIOR, E. Análise viscoelástica de pavimentos asfálticos usando elementos finitos e infinitos. *Revista Transportes*, [s. l.], v. 2, n. 3, p. 5-13, 2013.

XU, Q.; PROZZI, J. A. A time-domain finite element method for dynamic viscoelastic solution of layered-half-space responses under loading pulses. *Computers and Structures*, [s. l.], v. 160, p. 20-39, 2015.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. *The Finite Element Method: its basis & fundamentals*. 6. ed. Oxford: Ed. Elsevier, 2006.