

Submetido 04/02/2025. Aprovado 12/09/2025

Avaliação: revisão duplo-anônimo

Modelagem e controle de frenagem regenerativa em motor *brushless* DC

MODELING AND CONTROL OF REGENERATIVE BREAKING IN BRUSHLESS DC MOTOR

MODELADO Y CONTROL DE FRENADO REGENERATIVO EN MOTORES SIN ESCOBILLAS DC

Gabriel Andreatta

Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC)

gabriel.a12@aluno.ifsc.edu.br

Jacson Rodrigo Dreher

Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC)

jacson@ifsc.edu.br

Vinícius Berndsen Peccin

Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC)

vinicius.peccin@ifsc.edu.br

Resumo

A crescente emissão de poluentes por veículos com motores à combustão representa um desafio significativo, impulsionando a busca por soluções sustentáveis, como o incentivo da adoção de veículos elétricos para locomoção urbana. Contudo, uma problemática desse tipo de veículo é a limitação de autonomia e uma das abordagens estudadas é a implementação da frenagem regenerativa, que tem por objetivo converter energia cinética em elétrica para recarregar a bateria. Nesse contexto a proposta deste trabalho é desenvolver um driver de controle bidirecional de energia, voltado para o acionamento e a frenagem regenerativa de um motor brushless. Para isso, foi realizada uma análise dos métodos de acionamento e de frenagem e dos métodos de controle aplicáveis ao motor brushless, assim como estudo de topologias do circuito conversor. A metodologia incluiu a modelagem, simulação e implementação prática do sistema de controle, e para validação foram realizados testes experimentais, como o seguimento de referência x_a , variável e com velocidade variável. Os resultados obtidos demonstraram que a abordagem de modelo e de controlador adotados atendem os requisitos de desempenho estabelecidos, apresentando estabilidade em diversas faixas de operação.

Palavras-chave: frenagem regenerativa; motor brushless; driver bidirecional.

Abstract

The increasing emission of pollutants from vehicles with internal combustion engines represents a significant challenge, driving the search for sustainable solutions, such as promoting the adoption of electric vehicles for urban mobility. However, one issue with these vehicles is their limited range, and one of the approaches being studied is the implementation of regenerative braking, which aims to convert kinetic energy into electrical energy to recharge the battery. In this context, the objective of this paper is to develop a bidirectional energy control driver, focused on the operation of a brushless motor in both driving and regenerative modes. To achieve this, an analysis was conducted on the methods of operation and braking, as well as on control strategies applicable to the brushless motor, alongside a study of converter circuit topologies. The methodology included modeling, simulation, and practical implementation

of the control system, and to validate the system, experimental tests were conducted, including fixed reference tracking, variable reference tracking, and variable speed tracking. The results showed that the adopted model and control approach met the established performance requirements, demonstrating stability across various operating ranges.

Keywords: regenerative braking; brushless DC motor; bidirectional driver.

Resumen

La creciente emisión de contaminantes por vehículos con motores de combustión representa un desafío significativo, impulsando la búsqueda de soluciones sostenibles, como el fomento de la adopción de vehículos eléctricos para la movilidad urbana. No obstante, una problemática asociada a este tipo de vehículos es la limitación de autonomía, y una de las estrategias estudiadas es la implementación del frenado regenerativo, que tiene como objetivo convertir la energía cinética en energía eléctrica para recargar la batería. En este contexto, la propuesta de este trabajo es desarrollar un driver de control bidireccional de energía, orientado al accionamiento y frenado regenerativo de un motor brushless. Para ello, se realizó un análisis de los métodos de accionamiento y frenado, así como de los métodos de control aplicables al motor brushless, junto con un estudio de las topologías del circuito convertidor. La metodología incluyó la modelización, simulación e implementación práctica del sistema de control, y para su validación se llevaron a cabo pruebas experimentales, tales como el seguimiento de referencia fija, variable y con velocidad variable. Los resultados obtenidos demostraron que el modelo y el controlador adoptados cumplen con los requisitos de desempeño establecidos, mostrando estabilidad en diversas franjas de operación.

Palabras-Clave: frenado regenerativo; motor sin escobillas DC; controlador bidireccional.

Introdução

Diversos países têm demonstrado uma grande preocupação para reduzir a emissão de gases do efeito estufa, que têm como principal fonte os combustíveis fósseis. O transporte rodoviário é responsável por 16% das emissões globais de CO₂. Uma estratégia para atingir a meta de emissões líquidas zero até 2050 é substituir gradualmente a frota de veículos à combustão por veículos elétricos (IEA, 2024).

De acordo com a International Energy Agency (IEA, 2024), para que veículos elétricos entrem no mercado, os países devem incentivar: a mineração sustentável, a reciclagem e o melhor dimensionamento de baterias, a adoção de carros menores, a construção de infraestruturas de recarga públicas e domésticas, as quais, com o advento da geração distribuída de energia fotovoltaica, podem tornar a energia elétrica mais barata.

No ano de 2023, as vendas de veículos elétricos no mundo foram de 14 milhões, que representa um aumento de 35% quando comparadas a 2022, e mais de seis vezes maior do que as vendas em 2018. No total são aproximadamente 40 milhões de veículos elétricos nas ruas, com cerca de 22 milhões somente na China. Por outro lado, em países como Brasil, Índia, Indonésia, entre outros, menos de 0,5% das vendas são de veículos elétricos em razão dos altos preços e da falta de incentivos (IEA, 2024).

Grande parte dos veículos elétricos de pequeno porte emprega motores de corrente contínua sem escovas, do inglês *Brushless Direct Current* (BLDC), devido a sua alta eficiência, alto torque e baixa manutenção. Eles permitem a aplicação da frenagem regenerativa, sendo possível utilizá-los como um gerador de energia elétrica a partir da energia cinética durante a frenagem do veículo. A energia elétrica gerada

é utilizada para carregar a bateria, aumentando, assim, a sua autonomia (Bhurse; Bhole, 2018; Nian; Fei Peng; Zhang, 2014).

Diversos trabalhos apresentam o resultado das pesquisas na área de frenagem regenerativa. Xiaohong Nian, Fei Peng e Hang Zhang (2014) comparam formas de controle clássico como o proporcional-integral-derivativo (PID) com uma lógica de controle Fuzzy. No trabalho de Cao *et al.* (2018), os autores buscam um método de controle que minimize a ondulação do torque de frenagem causada pela comutação do motor, investigando diferentes formas e padrões de chaveamento para reduzir essa ondulação e manter o processo de frenagem controlável. O estudo de Catata *et al.* (2020) concentra-se na modelagem matemática da frenagem regenerativa, usando o método de espaço de estados, e conduz testes simulados. Nesse contexto, o presente trabalho propõe uma abordagem alternativa para a modelagem do freio regenerativo, empregando o método de modelagem de pequenos sinais descrito por Erickson e Maksimovic (2020), o que permite a aplicação de um controlador proporcional-integral (PI) que possa se adequar e manter a controlabilidade para diferentes faixas de velocidade do motor.

Revisão bibliográfica

Motor BLDC

O motor BLDC é constituído de um rotor de ímã permanente e de enrolamentos nos polos do estator. Seu funcionamento se dá pela atração do campo magnético rotacional induzido nas bobinas com o ímã permanente do rotor. O objetivo é manipular a corrente em cada fase no instante correto e em determinada direção. Em um cenário ideal, a corrente e a tensão da força contra-eletromotriz deveriam estar em fase, resultando em uma comutação ideal, sem ondulação do torque (Flui; Basu; Subbiah, 2003).

Tipicamente, as bobinas são conectadas na configuração estrela, conforme Figura 1:(a). Para que o motor exerça trabalho, é necessário um fluxo de corrente em duas das três fases do motor. Em um motor de seis polos (Fig. 1(a)), para rodar 120° no sentido horário, deve-se induzir uma corrente do ponto A para B (caminho 1) e depois de C para B (caminho 2). O rotor é deslocado em 60° por comutação, totalizando-se seis comutações por volta (Brown, 2002).

Sensores são instalados internamente ao motor e dispostos em um intervalo de 120° para identificar a posição do rotor. Dessa forma, é possível energizar as bobinas corretas, proporcionando o maior torque possível naquele instante. A Figura 1(b) mostra a comutação das três fases de um motor brushless, com base no nível lógico de cada sensor e indica a tensão em cada fase. Por exemplo, quando o sensor A está em nível alto, a tensão na fase A é positiva por 120° e flutuante (desconectada) nos próximos 60°. Quando o sensor A passa para o nível lógico baixo, a tensão na fase A é negativa por 120° e novamente flutuante nos próximos 60° (Brown, 2002).

A saída dos sensores irá fornecer seis códigos de 3 bits. Cada código define a alimentação das fases do motor. O bit mais significativo, do inglês Most Significant Bit (MSB), corresponde ao sensor C e o menos significativo, do inglês Least Significant Bit (LSB), corresponde ao sensor A (Brown, 2002).

As tensões em cada fase do estator, $v_a(t)$, $v_b(t)$ e $v_c(t)$, são modeladas pelas equações (1), (2) e (3), respectivamente; $i_a(t)$, $i_b(t)$ e $i_c(t)$ são as correntes de cada fase; R_a , R_b e R_c são as resistências de cada enrolamento; L_a , L_b e L_c , as indutâncias de cada

enrolamento; $e_a(t)$, $e_b(t)$ e $e_c(t)$ são as tensões geradas pela força contra-eletromotriz em cada fase. A Figura 2 mostra o modelo elétrico do motor BLDC (Catata *et al.*, 2020).

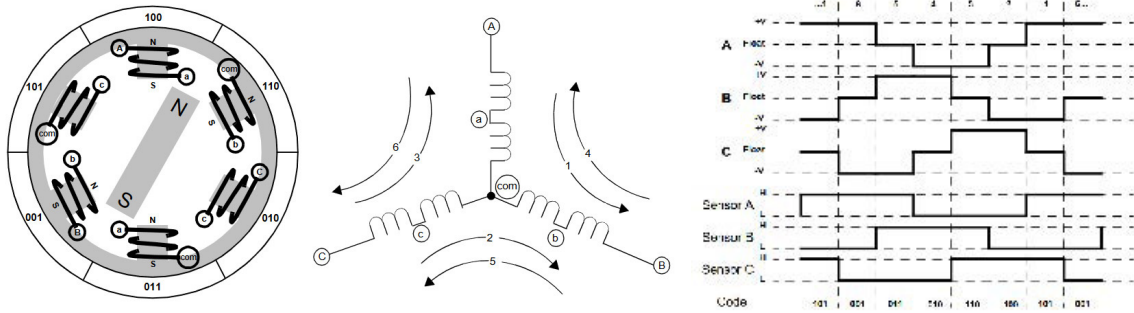


Figura 1 – Motor *brushless* e tensão nas fases

Fonte: Brown, 2002.

$$v_a(t) = \frac{di_a(t)}{dt}L_a + R_a i_a(t) + e_a(t) \quad (1)$$

$$v_b(t) = \frac{di_b(t)}{dt}L_b + R_b i_b(t) + e_b(t) \quad (2)$$

$$v_c(t) = \frac{di_c(t)}{dt}L_c + R_c i_c(t) + e_c(t) \quad (3)$$

Em um motor balanceado, isto é $R_a=R_b=R_c$ e $L_a=L_b=L_c$, tem-se que o torque eletromagnético T_e pode ser obtido pela Equação (4), em que ω_n é a velocidade do rotor em *rad/s*. Analisando a equação percebe-se que o torque do motor é diretamente proporcional à corrente e tensão contra-eletromotriz, e inversamente proporcional à velocidade (Catata *et al.*, 2020; Zhou; Fang, 2013).

$$T_e(t) = \frac{e_a(t)i_a(t) + e_b(t)i_b(t) + e_c(t)i_c(t)}{\omega_n(t)} \quad (4)$$

Em rotações elevadas haverá uma redução do torque, ocasionando a redução também de um campo magnético de alta intensidade no estator. Por outro lado, a velocidade do rotor pode ser controlada indiretamente pela tensão aplicada nas fases, alterando o valor médio da corrente nos enrolamentos (Kim; Lee; Kwon, 2006).

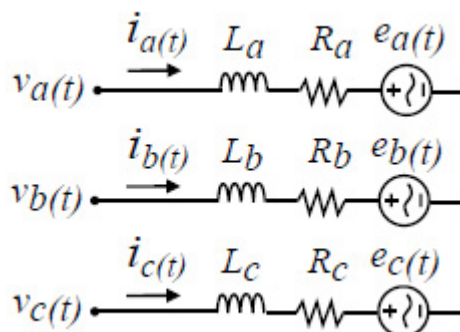


Figura 2 – Modelo motor BLDC
Fonte: Catata *et al.*, 2020, adaptado.

A tensão contra-eletromotriz é proporcional à velocidade do motor, sendo assim, para um motor balanceado, $e_a(t) = e_b(t) = e_c(t)$. Realizando a medição da tensão entre duas fases do motor em testes com a velocidade constante, é possível encontrar o coeficiente de força contra-eletromotriz, K_e , dado em *volt/RPM* (Zhou; Fang, 2013).

Driver inversor para controle de motor BLDC

A topologia abordada neste trabalho é a do inversor de ponte completa, cuja configuração é apresentada na Figura 3. Essa configuração predomina no acionamento de motores BLDC e consiste em seis chaves que realizam a comutação das bobinas do motor BLDC. A vantagem desse tipo de circuito é a baixa ondulação do torque e a possibilidade da implementação da frenagem regenerativa (Misal; Bhasme, 2017; Xu *et al.*, 2016).

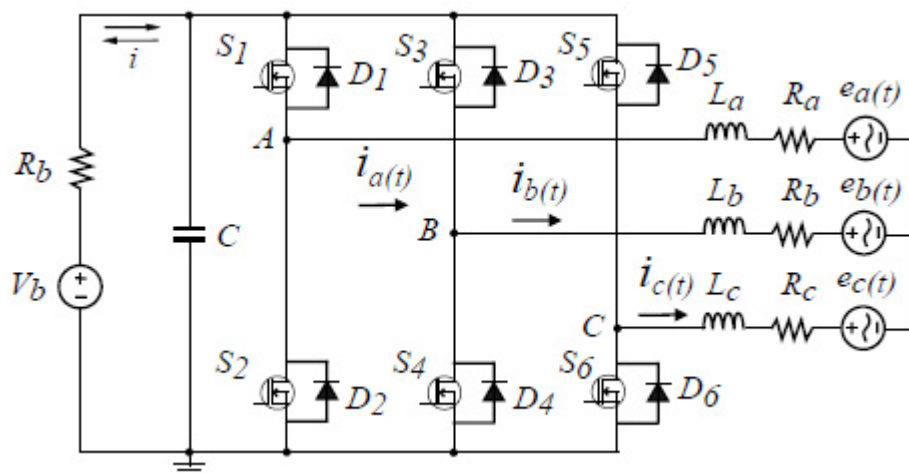


Figura 3 – Topologia de ponte completa
Fonte: Bhurse; Bhole, 2018, adaptado.

Utilizando a topologia de ponte completa é possível obter dois modos de operação, sendo: modo motor, quando a bateria entrega energia para o motor e ele exerce trabalho; e o modo gerador, no qual o motor atua como gerador, fornecendo energia à bateria e, consequentemente, freando o motor (Bhurse; Bhole, 2018).

A Tabela 1 apresenta o nível lógico de saída dos sensores do motor BLDC e as chaves que devem ser acionadas para que o motor gire no sentido horário. Para rotação no sentido anti-horário, basta inverter o sentido das correntes nos enrolamentos. A lógica de comutação pode ser encontrada em (Kim; Lee; Kwon, 2006).

C	B	A	S5	S6	S3	S4	S1	S2
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0

Tabela 1 – Lógica de comutação para rotação no sentido horário

Fonte: Brown, 2002.

Existem algumas variações na topologia de circuitos empregadas na implementação do conversor de controle de um motor *brushless*. O controle da velocidade pode ser realizado modulando a tensão diretamente no barramento CC, sendo implementado através de conversores *buck-boost*, *buck* e *cuk*. A vantagem dessas topologias é a diminuição da ondulação do torque devido ao indutor nos conversores, porém permitindo apenas um sentido da corrente, impossibilitando, assim, a implementação da frenagem regenerativa (Misal; Bhasme, 2017).

Outra forma de realizar o controle da velocidade do motor BLDC é manter a tensão do barramento CC constante e aplicar a modulação da largura de pulso, do inglês *Pulse Width Modulation* (PWM), nos terminais do motor, variando a tensão média $v_a(t)$, $v_b(t)$ e $v_c(t)$. Dessa forma é possível que a corrente do barramento CC seja bidirecional, permitindo a frenagem regenerativa (Kim; Lee; Kwon, 2006).

A técnica de geração de energia elétrica a partir da frenagem de um motor BLDC consiste na conversão de energia cinética em energia elétrica, direcionada para recarregar a bateria do veículo elétrico. A frenagem ocorre devido às características construtivas do motor BLDC. A partir do movimento do rotor, composto por ímãs permanentes, gera-se uma força contra-eletromotriz. Esse fenômeno segue os princípios da Lei de Lenz (Bhurse; Bhole, 2018).

No modo de frenagem, a lógica de comutação apresentada na Tabela 2 deve ser implementada (Nian; Peng; Zhang, 2014).

Modo de regeneração

A tensão gerada pela força contra-eletromotriz normalmente é menor do que a tensão da bateria. Para que haja um fluxo de corrente de carga da bateria, pode-se utilizar a topologia de ponte completa operando como um conversor *boost* (Kim; Lee; Kwon, 2006; Bhurse; Bhole, 2018).

No modo gerador aplica-se a modulação de largura de pulso (PWM) somente nas chaves da parte baixa do conversor (S_2 , S_4 , S_6), conforme a Tabela 2, enquanto as chaves da parte alta (S_1 , S_3 , S_5) cam desativadas em todas as etapas da comutação. A Figura 4 mostra o circuito equivalente para regeneração com as fases A e B do motor, equivalente à primeira linha da Tabela 2 (Bhurse; Bhole, 2018).

C	B	A	S5	S6	S3	S4	S1	S2
1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0

Tabela 2 – Lógica de comutação para regeneração no sentido horário

Fonte: Brown, 2002.

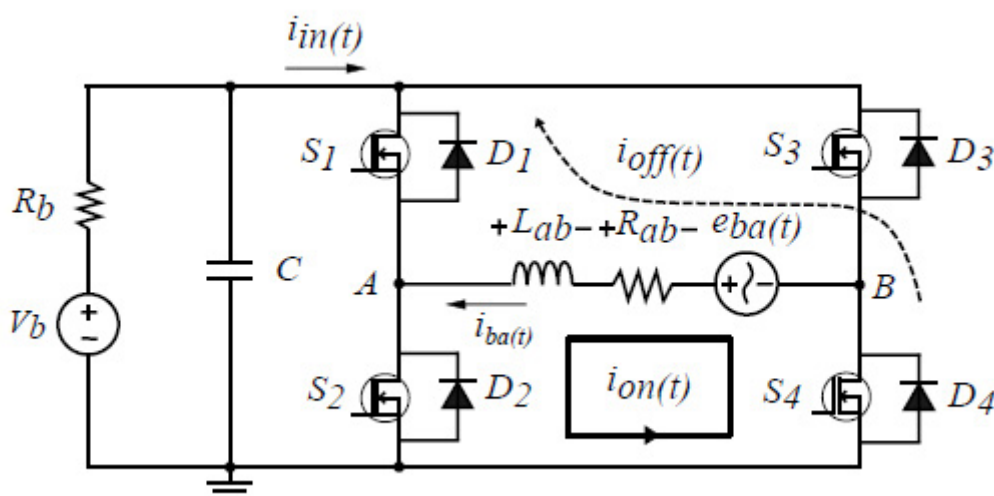


Figura 4 – Circuito equivalente para o modo de regeneração

Fonte: Bhurse; Bhole, 2018, adaptado.

No modo de frenagem ou regeneração, a tensão contra-eletromotriz $e_{ab}(t)$ é utilizada para o carreamento da bateria, aplicando o PWM na chave S_2 . Quando a chave S_2 está fechada, ela fornece um caminho para corrente $i_{on}(t)$ entre as fases A e B através do diodo D_4 . A tensão entre os terminais A e B do motor é igual a zero. Quando a chave S_2 é aberta, a corrente $i_{ab}(t)$ é direcionada para o capacitor de entrada e bateria através do diodo D_1 , seguindo o caminho $i_{off}(t)$ (Bhurse; Bhole, 2018).

A Figura 5 ilustra o circuito equivalente para o modo de operação boost. Com o controle das chaves da Tabela 2, o inversor em ponte completa opera como um boost, em que a fonte de entrada é a força contraeletromotriz, e a saída é a bateria. Para obter um modelo mais próximo do real, as resistências da bateria e das bobinas serão consideradas. Simplificando a nomenclatura, obtém-se então R_{ab} , L_{ab} , $e_{ba}(t) = e_b(t) - e_a(t)$ e $i_{ba}(t) = i_b(t) = -i_a(t)$, sendo representados como R , L , $e(t)$ e $i(t)$.

A Figura 6 mostra os circuitos equivalentes para chave fechada, chave aberta e as formas de onda da tensão e corrente para o modo de regeneração para a primeira linha da Tabela 2. Para as demais linhas, o circuito equivalente é o mesmo, apenas alterando-se as chaves que são acionadas, de acordo com as polaridades das fontes da força contraeletromotriz.

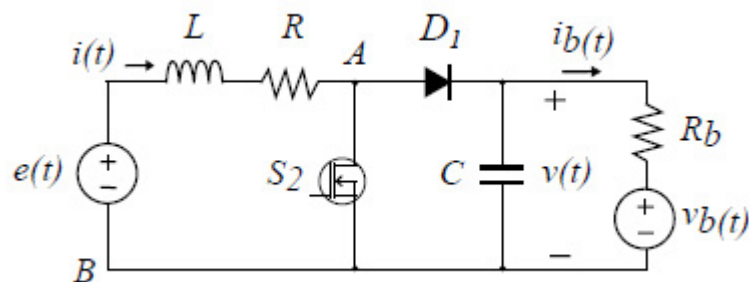


Figura 5 – Circuito equivalente em modo de operação *boost*

Fonte: Bhurse; Bhole, 2018, adaptado.

Analisando as formas de onda no instante de regeneração, mostradas na Figura 6(c), a chave S_1 da parte superior permanece aberta por todo o período, enquanto PWM é aplicado na chave S_2 . No período de 0 a $d(t)T$, a chave S_2 permanece fechada, resultando no circuito equivalente da Figura 6(a). Com a chave S_2 , fechada a corrente nas bobinas $i(t)$ aumenta de acordo com a tensão eletromotriz $e(t)$ menos a queda de tensão da resistência R das bobinas, congruando um curto-circuito entre duas fases do motor modelado pela Equação (5).

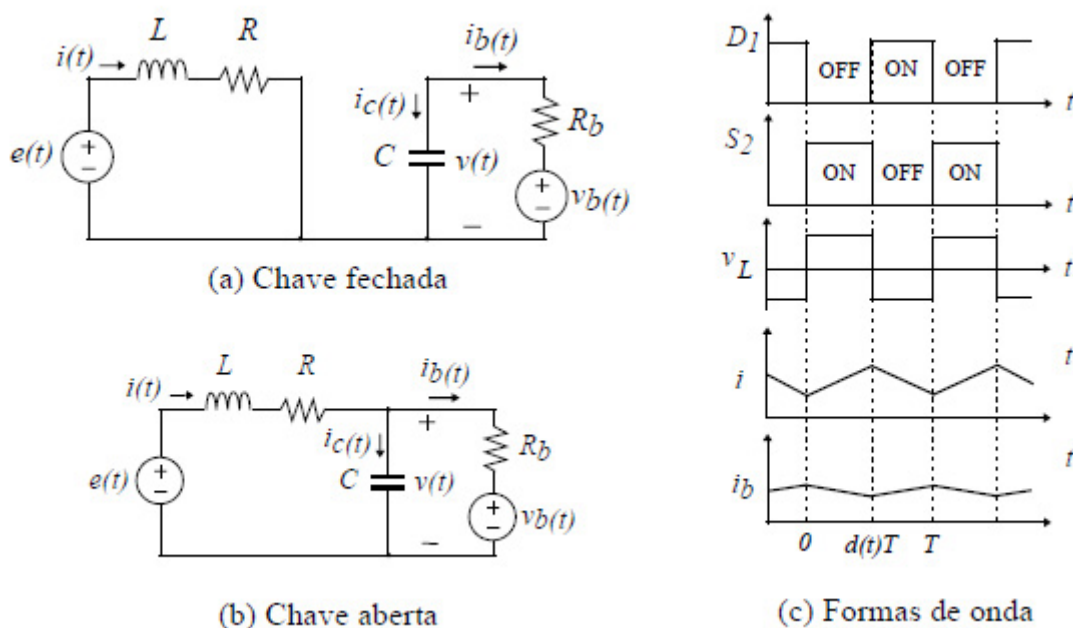


Figura 6 – Formas de onda de tensão e corrente para o modo de regeneração

Fonte: Bhurse; Bhole, 2018, adaptado.

A Equação (6) dene a corrente no capacitor durante o período de chave fechada. Observa-se que há uma diminuição da corrente $ib(t)$ ao longo do período, visto que o fluxo de energia flui do capacitor para a bateria como observado no gráfico da Figura 6(c).

$$\frac{Ldi(t)}{dt} = e(t) - i(t)R \quad (5)$$

$$\frac{Cdv(t)}{dt} = -\frac{v(t) - v_b(t)}{R_b} \quad (6)$$

Por fim, no instante em que a chave é aberta, $d(t)T$ a T , a energia é transferida para a bateria pelo diodo da parte alta D_1 , aumentando a tensão $v_L(t)$, que diminuindo corrente nas bobinas $i(t)$ e aumentando na corrente da bateria $i_b(t)$ (Fig. 6(c)). Com isso, obtém-se o circuito equivalente para chave aberta na Figura 6(b) e, a partir da análise do circuito e das formas de onda, obtém-se as equações para a tensão no indutor e a corrente no capacitor, (7) e (8), respectivamente.

$$\frac{Ldi(t)}{dt} = e(t) - i(t)R - v(t) \quad (7)$$

$$\frac{Cdv(t)}{dt} = i(t) - \frac{v(t) - v_b(t)}{R_b} \quad (8)$$

Métodos

Este trabalho visa realizar o controle do torque de frenagem em malha fechada. A topologia de circuito escolhida foi a de ponte completa, conforme ilustrado na Figura 3. A escolha foi baseada na simplicidade de construção e na capacidade de implementar a frenagem regenerativa.

Conforme observado na Equação (4), o torque do motor BLDC é diretamente proporcional à corrente e à força contra-eletromotriz. A força contra-eletromotriz é proporcional à velocidade de rotação do motor. Durante a frenagem há corrente em apenas duas das três fases. Considerando o circuito equivalente da primeira linha da Tabela 2, tem-se que $i_c(t) = 0$ e $i(t) = i_b(t) = -i_a(t)$. Sendo assim, é possível representar o torque eletromagnético de frenagem T_{ef} como sendo:

$$T_{ef} = \frac{-e_a(t)i(t) + e_b(t)i(t)}{\omega_n} \quad (9)$$

Ainda considerando que $(e_b(t) - e_a(t) = e_{ba}(t) = e(t))$ e assumindo que a velocidade e a força eletromotriz são constantes durante um período de chaveamento, tem-se que $e(t) = E$ e, portanto, o torque de frenagem pode ser representado por:

$$T_{ef} = \frac{i(t)E}{\omega_n} \quad (10)$$

Pode-se simplificar a relação da força eletromotriz com a velocidade do motor obtendo a constante $K_e = E/\omega_n$. Portanto, com a Equação (11) tem-se que o torque eletromagnético de frenagem do motor é dado em função da corrente nas bobinas (i) com a constante de torque eletromagnético (K_e).

$$T_{ef} = K_e i(t) \quad (11)$$

Pode-se verificar que, ao controlar a corrente na bobina, é possível regular indiretamente o torque de frenagem. A Figura 7 mostra um diagrama do sistema de controle de torque proposto. As correntes das três fases do motor são medidas pelos sensores $i_a(t)$, $i_b(t)$ e $i_c(t)$ e são submetidas a um filtro passa-baixa de corrente $H(s)$. O valor é comparado com a referência de corrente, que é proporcional à posição do pedal de freio do veículo elétrico. O compensador $C(s)$ determina a ação de controle necessária. O bloco PWM transforma a ação de controle em sinal PWM para acionar as chaves utilizadas para realizar a frenagem regenerativa do motor.

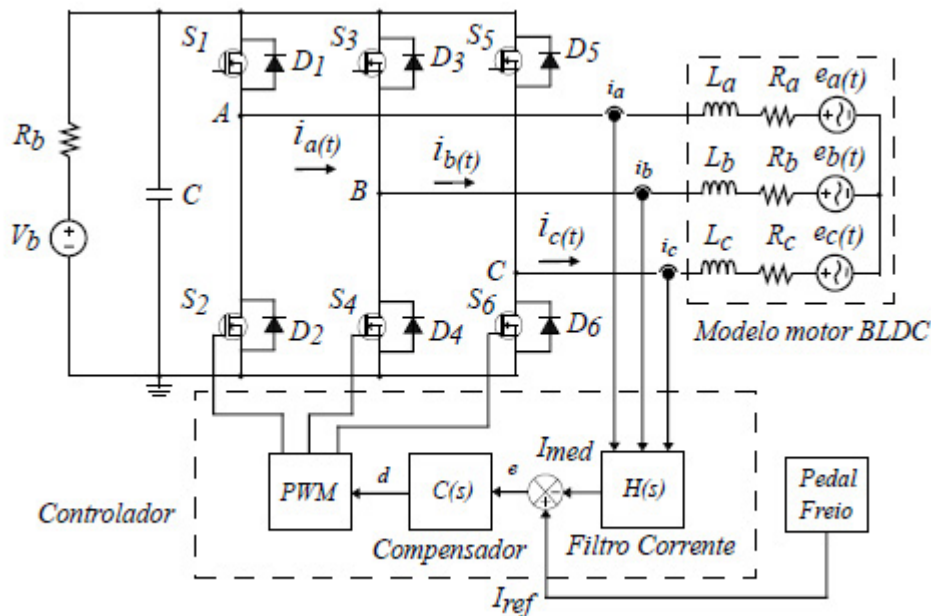


Figura 7 – Diagrama de blocos
Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

Modelagem do freio

O circuito elétrico equivalente que representa o sistema durante a frenagem do motor é apresentado na Figura 5. Para modelagem, seguiu-se a abordagem do modelo de pequenos sinais descrita por Erickson e Maksimovic (2020).

A modelagem por espaço de estados médios é uma técnica para obter um conjunto de equações diferenciais que representa a dinâmica de baixa frequência do conversor. A modelagem de pequenos sinais é então aplicada a esse modelo médio para permitir a linearização a partir de um ponto de operação, possibilitando assim a análise e o projeto de controle em malha fechada. A Figura 8 exemplifica esse processo, mostrando como são obtidas as médias das formas de onda de corrente e tensão. As equações (12) e (13) representam as relações instantâneas entre corrente, tensão e suas derivadas nos elementos indutivos e capacitivos.

A abordagem inicia com o levantamento das equações que definem a corrente média no indutor ($i(t)$) e a tensão média no capacitor de saída ($v(t)$) durante um período de chaveamento PWM de alta frequência.

$$\frac{L di(t)}{dt} = v_L(t) \quad (12)$$

$$\frac{C dv(t)}{dt} = i_C(t) \quad (13)$$

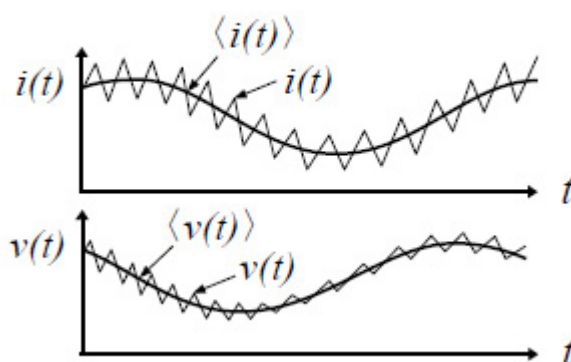


Figura 8 – Corrente no indutor e tensão no capacitor

Fonte: Erickson; Maksimovic, 2020, adaptado.

Erickson e Maksimovic (2020) apontam que os componentes médios de corrente e tensão $\langle i(t) \rangle$ e $\langle v(t) \rangle$ tanto no indutor como no capacitor seguem a mesma definição apresentada nas Equações (12) e (13). Sendo assim, tem-se que, as médias de tensão e corrente, são iguais à derivada da média em um período T_s , podendo serem reescritas nas Equações (14) e (15), respectivamente.

$$\frac{Ld\langle i(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle v(t) \rangle_{T_s} \quad (14)$$

$$\frac{Cd\langle v(t) \rangle_{T_s}}{dt} = \langle i(t) \rangle_{T_s} \quad (15)$$

Com isso, realizando a substituição das Equações (5) e (7) na Equação (14), de mesmo modo, substituindo as Equações (6) e (8) na Equação 15 e realizando a integral de 0 a $d(t)T$ e de $d(t)T$ a T em ambas, obtém-se a média do período pelas Equações (16) e (17).

$$\frac{Ld\langle i(t) \rangle}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^{d(t)T} (\langle e(t) \rangle - \langle i(t) \rangle R) dt + \frac{1}{T} \int_{d(t)T}^T (\langle e(t) \rangle - \langle i(t) \rangle R - \langle v(t) \rangle) dt \quad (16)$$

$$\frac{Cd\langle v(t) \rangle}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^{d(t)T} - \left(\frac{\langle v(t) \rangle - \langle v_b(t) \rangle}{R_b} \right) dt + \frac{1}{T} \int_{d(t)T}^T \left(\langle i(t) \rangle - \frac{\langle v(t) \rangle - \langle v_b(t) \rangle}{R_b} \right) dt \quad (17)$$

Resolvendo as integrais de (16) e (17) obtém-se as Equações (18) e (19), em que $d'(t) = 1 - d(t)$.

$$\frac{Ld\langle i(t) \rangle}{dt} = d(t)(\langle e(t) \rangle - \langle i(t) \rangle R) + d'(t)(\langle e(t) \rangle - \langle i(t) \rangle R - \langle v(t) \rangle) \quad (18)$$

$$\frac{Cd\langle v(t) \rangle}{dt} = d(t) \left(\frac{\langle v(t) \rangle - \langle v_b(t) \rangle}{R_b} \right) + d'(t) \left(\langle i(t) \rangle - \frac{\langle v(t) \rangle - \langle v_b(t) \rangle}{R_b} \right) \quad (19)$$

Verifica-se que as equações são não-lineares devido a multiplicação por termos variantes no tempo, impossibilitando a análise de circuito utilizando a Transformada de Laplace descrita por Lathi (2022). Sendo assim, a linearização do modelo deve ser realizada para posteriormente aplicar a transformada (Erickson; Maksimovic, 2020).

No processo de linearização é necessário definir um ponto de operação do conversor em determinado ciclo de trabalho D e para uma determinada tensão de força eletromotriz E , onde D e E denotam um ponto estático de operação. Nesta condição, as variações médias em um período de chaveamento são nulas, com isso, a corrente no indutor $\langle i(t) \rangle$ e a tensão de saída $\langle v(t) \rangle$, passam a adotar um valor constante para a linearização no ponto de operação, I e V , descritos pelas Equações da corrente média no indutor (20) e tensão de saída (21) para um único ciclo de trabalho. Os valores adotados para definir o ponto de operação para a linearização são apresentados na Tabela 3, com L e R obtidos através de medição entre duas fases do motor e $V_{pk}/krpm$ sendo a constante de tensão eletromotriz gerada entre duas fases do motor, obtida experimentalmente. C é o valor do capacitor, V_b é a tensão nominal da bateria e R_b a

resistência em série da bateria, e por m , E como valor de tensão gerada entre duas fases do motor em uma velocidade de aproximadamente 150 RPM, considerando 75% da velocidade máxima do motor, representando uma faixa ideal para linearização.

$$I = \frac{E - V_b(1 - D)}{R_b(1 - D)^2 + R} \quad (20)$$

$$V = (1 - D)IR_b + V_b \quad (21)$$

Parâmetro	Valor
L	420 μ H
R	0,3 Ω
$V_{pk}/krpm$	132 V/krpm
C	300 μ F
R_b	1 Ω
V_b	36 V
E	20 V
D	0,5
I	3,64 A
V	37,81 V

Tabela 3 – Valores médios no ponto estático de operação para linearização
Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

Para linearizar as Equações (18) e (19) no ponto de operação (I, V) , considera-se que a tensão eletromotriz $\langle e(t) \rangle$ e o ciclo de trabalho $\langle d(t) \rangle$ correspondem a um valor constante acrescido de pequenas variações, representadas por $\hat{e}$ e $\hat{d}$. Da mesma forma, os valores constantes no ponto de operação de corrente na bobina e tensão de saída, expressos pelas equações (20) e (21), quando somados às pequenas variações $\hat{i}(t)$ e $\hat{v}(t)$, resultam em:

$$\begin{aligned} d(t) &= D + \hat{d} \\ \langle e(t) \rangle &= E + \hat{e} \\ \langle i(t) \rangle &= I + \hat{i} \\ \langle v(t) \rangle &= V + \hat{v} \\ \langle v_b(t) \rangle &= V_b + \hat{v}_b \end{aligned} \quad (22)$$

Substituindo (22) em (18) e (19), obtém-se:

$$\frac{Ld(I + \hat{i})}{dt} = (D + \hat{d})(E + \hat{e} - IR - \hat{i}R) + (D' - \hat{d})(E + \hat{e} - V - \hat{v} - IR - \hat{i}R) \quad (23)$$

$$\frac{Cd(V + \hat{v})}{dt} = -(D + \hat{d})\left(\frac{V + \hat{v} - V_b - \hat{v}_b}{R_b}\right) + (D' - \hat{d})\left(I + \hat{i} - \frac{V + \hat{v} - V_b - \hat{v}_b}{R_b}\right) \quad (24)$$

Ao expandir as Equações (23) e (24), identificam-se termos constantes que representam o ponto de linearização em regime permanente, termos de primeira ordem que são funções lineares das variações ac da equação, e termos de segunda ordem que implicam a multiplicação de dois ou mais termos variantes no tempo, conferindo não linearidade à equação.

Na linearização, desconsideram-se os termos de segunda ordem, pois são termos não-lineares e suas magnitudes são significativamente menores comparados aos de primeira ordem. Por definição, os termos constantes são zero, já que a derivada de uma constante em regime permanente é zero. Assim, somente os termos de primeira ordem são considerados, resultando nas equações linearizadas para pequenos sinais em (25) e (26).

$$\frac{Ld\hat{i}}{dt} = \hat{e} + V\hat{d} - D'\hat{v} - R\hat{i} \quad (25)$$

$$\frac{Cd\hat{v}}{dt} = D'\hat{i} - I\hat{d} - \frac{\hat{v}}{R_b} + \frac{\hat{v}_b}{R_b} \quad (26)$$

Para a construção do circuito equivalente de pequenos sinais é necessário unir as equações médias linearizadas. Na Figura 9(a) obtém-se o circuito da Equação (25) e na Figura 9(b) da Equação (26), representando a malha de tensão no indutor e a malha de corrente no capacitor, respectivamente.

Unindo as duas malhas da Figura 9 obtém-se o circuito equivalente para pequenos sinais na Figura 10. As fontes dependentes $D'\hat{v}$ e $D'\hat{i}$ da Figura 9 são modeladas como um transformador ideal na Figura 9 com razão de $D': 1$, sendo $D' = 1 - D$.

A partir do circuito da Figura 10, utilizando o método de superposição para resolução de circuitos elétricos, é possível aplicar a Transformada de Laplace para obter a função de transferência do modelo, indicada na Equação 27. Observa-se que a função é de segundo grau e possui um zero.

$$\frac{\hat{i}(s)}{\hat{d}(s)} = \frac{CVs + \frac{V}{R_b} - \frac{I}{(1-D)}}{CLs^2 + (CR + \frac{L}{R_b})s + \frac{R}{R_b} + 1} \quad (27)$$

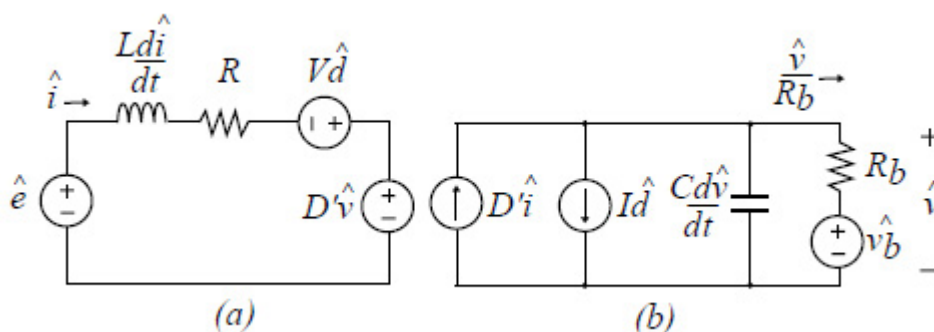


Figura 9 – (a) Malha da tensão no indutor (b) Malha da corrente no capacitor

Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

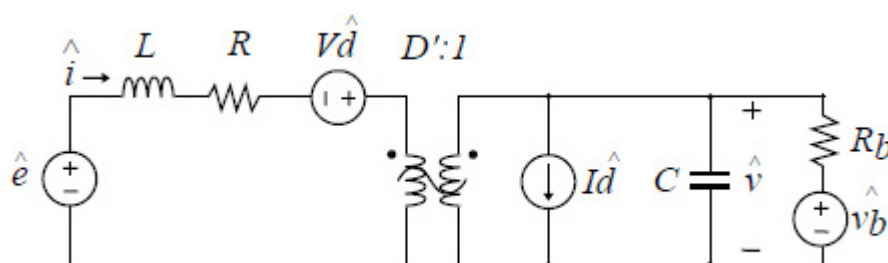


Figura 10 – Modelo pequenos sinais

Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

Simulação modelo

Como forma de validação do modelo matemático de pequenos sinais, foi realizada a comparação da função de transferência da Equação (27) realizada no *Software MatLab®* com a simulação do modelo chaveado (Fig. 14(a)) no *Software PowerSIM®* com os parâmetros da Tabela 3. No gráfico da Figura 14(a), tem-se a resposta da função de transferência em azul e do circuito chaveado em azul claro ao fundo. Para visualizar a resposta foi imposta uma perturbação de 0.05 no ciclo de trabalho d no tempo de 0, 15s. No gráfico verifica-se que o modelo condiz com a resposta do circuito chaveado, apresentando um tempo de acomodação de aproximadamente 2ms sem apresentar sobressinal.

No modelo há duas variáveis que podem mudar a dinâmica do mesmo, são elas o ciclo de trabalho D e a tensão gerada no motor E . Sabendo que a tensão eletromotriz E é proporcional à velocidade do motor em RPM, e sabendo que o que o freio deve operar em diversas faixas de ciclo de trabalho D foram simuladas diversas funções de transferências com D variando de 0,2 a 0,8 e E variando de 13,2 a 26,4, emulando diferentes velocidades de operação. Com as funções de transferência obtém-se o diagrama de bode na Figura 14(b). No diagrama observa-se que a magnitude em baixas frequências varia de 30 a 40dB, a margem de fase é aproximadamente 90° e margem de ganho é infinita.

Controle

Para a determinação dos requisitos do controle levou-se em consideração a necessidade de emular o comportamento de um freio mecânico. Definiu-se então que a resposta do controle não deve apresentar sobressinal, seguir referência imposta pelo usuário através do pedal do freio e deve dispor de um tempo de estabilização menor que 400ms, pois segundo estudos desenvolvidos por Čulík, Kalašová e Štefancová (2022), o tempo de resposta humano no trânsito é em média entre 400ms a 1s.

Para garantir que o sistema tenha uma resposta sem sobressinal, com erro zero em regime permanente e rejeitando perturbações, um controlador Proporcional-Integral (PI) foi projetado seguindo a metodologia de projeto de controlador descrita por Ogata (2010), utilizando os métodos de resposta em frequência em conjunto com lugar das raízes. Uma vantagem desse tipo de controlador é de que ele busca minimizar o erro em regime permanente, melhorando também a rejeição de perturbações de baixas frequências na saída.

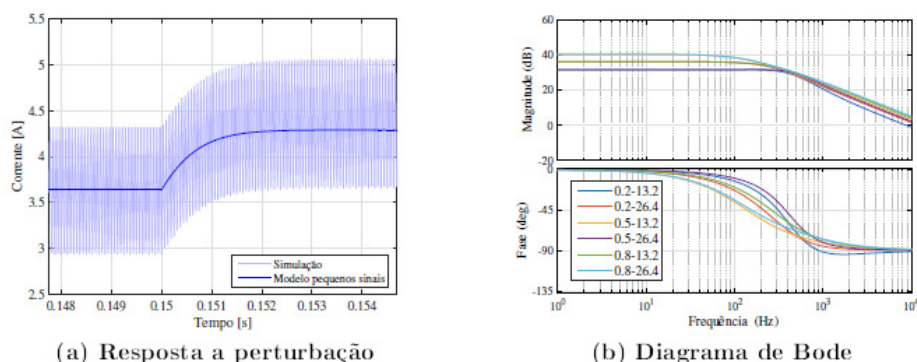


Figura 11 – Simulação modelo pequenos sinais

Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

Com os requisitos definidos, deseja-se obter uma resposta criticamente amortecida e um tempo de estabilização menor que 400ms, retardando o tempo de resposta em comparação à resposta em malha aberta (Fig. 14(a)). Com os requisitos, obtém-se frequência de oscilação $\omega_n = 40\text{rad/s}$ e fator de amortecimento $\xi = 1$. Assim, calculam-se os ganhos integral $T_i = 0,0025$ e proporcional $K_p = (0,3 \cdot T_i)$ do controlador, e implementando-os na Equação (28), tem-se que o erro é dado por $e(t) = r - i(t)$, com r sendo a referência e $i(t)$ a variável de controle.

$$D(t) = K_p e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \quad (28)$$

A Figura 12 apresenta o diagrama de blocos de controle, que tem as funções de transferência da planta $G(s)$, do controlador $C(s)$ e do filtro do sensor de corrente, representado por $H(s)$, o qual corresponde a um filtro RC passa-baixas descrito pela Equação (29), com $R_f = 16k\Omega$ e $C_f = 1\mu F$, resultando na frequência de corte de 10Hz. Também são apresentados os sinais de referência $r(s)$, erro $e(s)$, entrada $d(s)$ e saída $\Delta i(s)$, somados com o valor de corrente no ponto de linearização I para obter o sinal de saída $i(s)$.

$$H(s) = \frac{1}{R_f C_f s + 1} \quad (29)$$

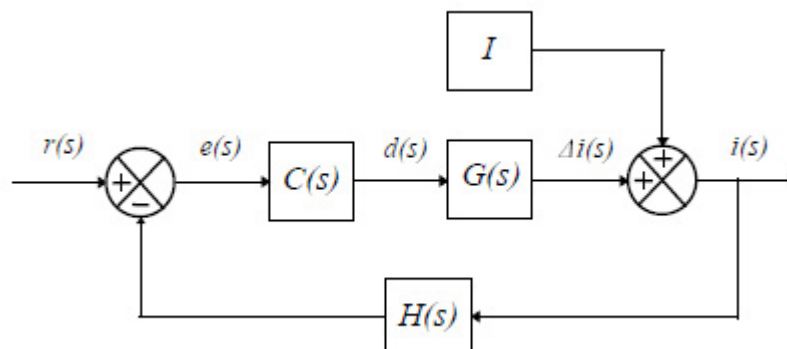


Figura 12 – Diagrama de blocos controlador

Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

Para a implementação no microcontrolador o controle foi discretizado pelo método de *Tustin* com período de amostragem de 1ms, seguindo o modelo ideal do controlador PI.

Implementação prática

Para realizar os testes práticos do freio regenerativo, construiu-se um dispositivo para acoplar dois motores BLDC, com um motor funcionando como tracionador e o outro como gerador, ou freio, por meio de uma polia. O acoplamento pode ser visualizado na Figura 13, onde (a) representa o motor tracionador e (b) o motor gerador. Utilizou-se um *driver* comercial (c) de motor BLDC para controlar a velocidade do motor tracionador (a). No item (d) da figura tem-se o módulo de controle para o motor gerador, que inclui a placa de circuito impresso do *driver* com a topologia apresentada na Figura 3.

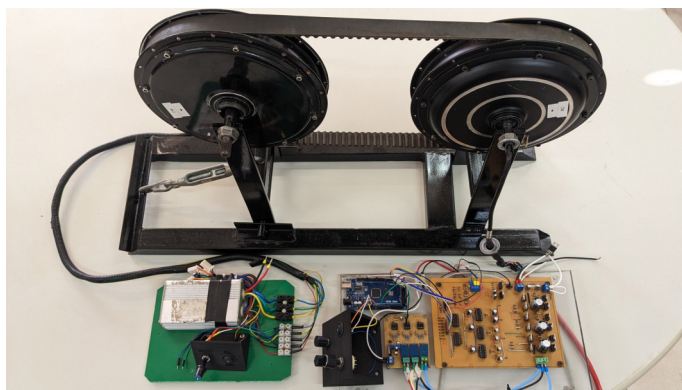


Figura 13 – Bancada de testes

Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

Bancada de testes

Para obter os resultados experimentais e validar os requisitos do controlador, realizou-se uma simulação no *Software PowerSIM®* do circuito chaveado, implementando o controlador discretizado em bloco de programação na linguagem C. O resultado simulado está apresentado na Figura 14 (a).

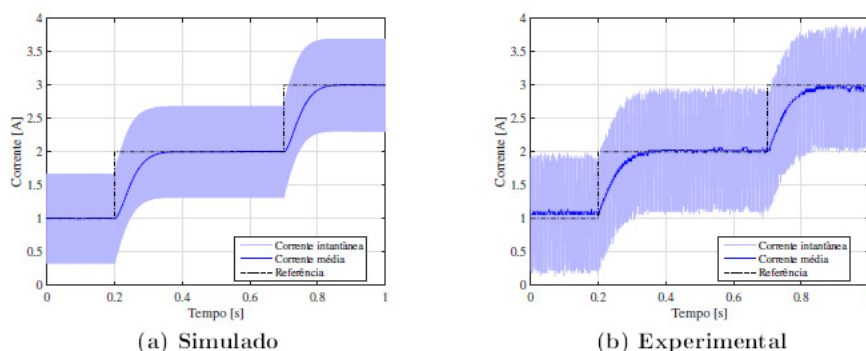


Figura 14 – Seguimento de referência

Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

O teste também foi realizado no protótipo, com a implementação do controlador discretizado no microcontrolador. No processo, foi utilizada a fonte xa de 20V para a tensão eletromotriz $e(t)$, e utilizando duas das três fases do motor. A medição da corrente foi realizada com a ponta de prova de corrente *Tektronix A622*, no osciloscópio *Tektronix TDS2024C*. O resultado do teste prático está disposto na Figura 14(b).

Analisando a Figura 14(a) e (b), observa-se que o requisito de tempo de estabilização de 100 ms e o requisito de não apresentar sobressinal foram alcançados. Observa-se também que o controlador busca erro zero em regime permanente, característico da parcela integral do controlador PI. Na resposta experimental, para a referência de 1A, tem-se a média em regime permanente de 1,0896A, para 2A a média de 2,0063A e para 3A a média de 2,9570A, representando um erro de 8,96%, 0,315% e -1,43%, respectivamente. O erro pode ocorrer pelo fato da não linearidade na medida do sensor de corrente (ACS712-20A), além também do fato de que o ajuste do sensor foi realizado no ponto de 2A, podendo assim variar em diferentes faixas. Outra hipótese também é de que o controlador diverge do ponto de operação em que o modelo foi linearizado.

Com a validação dos requisitos do controlador, os testes seguintes foram realizados seguindo a conguração apresentada no diagrama da Figura 7, na bancada de testes (Fig. 13), com um motor tracionando e outro atuando como gerador. O primeiro teste realizado foi o de seguimento de referência variável. A Figura 15 mostra a resposta em rampa crescente e decrescente. O objetivo deste teste é simular o comportamento de uma frenagem imposta pelo usuário. No teste, foi aplicado uma rampa de 5 segundos atingindo a o valor de 2,5A por mais 5 segundos, e por fim, uma rampa decrescente da mesma duração.

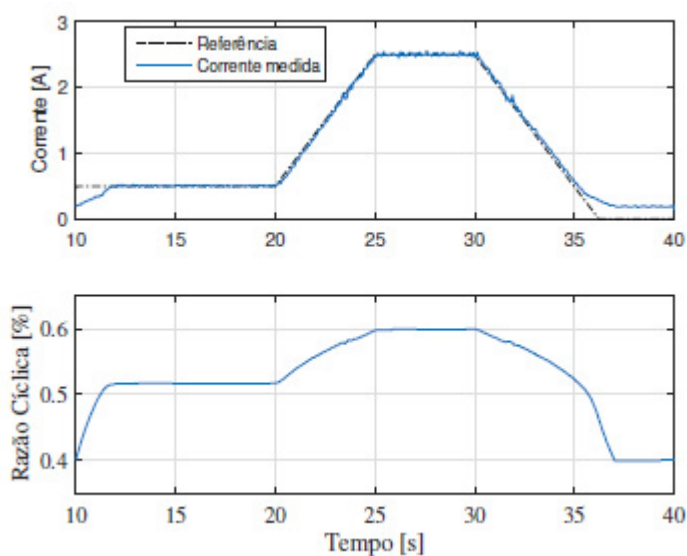


Figura 15 – Seguimento de referência - Rampa

Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

Na Figura 15, pode-se observar que o controlador consegue obter uma resposta satisfatória, sem atraso no início da rampa. O segundo gráfico da Figura 15 mostra a razão cíclica aplicada nas chaves do circuito, análoga à ação de controle exercida pelo controlador. Observa-se que se mantém estável, no valor de 0,517, até o tempo de 20 segundos e com valor de 0,599 no tempo de 25 a 30 segundos.

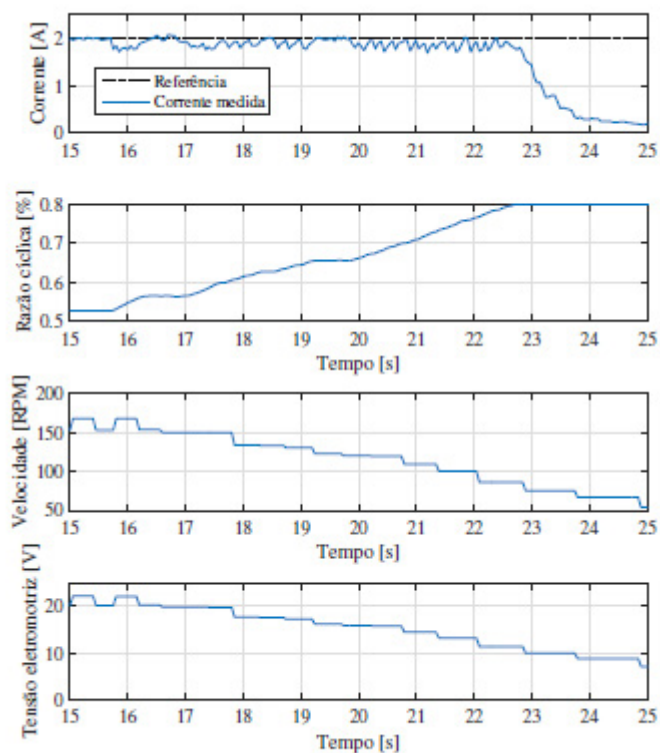


Figura 16 – Seguimento de referência - Velocidade variável

Fonte: Elaborada pelo/os autores/as.

Por fim, o terceiro teste realizado foi o segmento de referência para uma velocidade variável, apresentado pelo gráfico da Figura 16. O teste tem como objetivo testar o comportamento do circuito para diferentes faixas de velocidade, uma vez que a velocidade do motor dita a tensão eletromotriz gerada por ele. A figura exhibe os gráficos da corrente média e a referência de corrente, a razão cíclica D , no segundo gráfico, e a velocidade do motor em RPM e a tensão eletromotriz equivalente no terceiro e quarto gráfico, respectivamente. Durante o teste, foi imposta uma referência constante de 2A e a velocidade inicial do motor foi definida em 150 RPM, reduzida até 50 RPM na duração de aproximadamente 10 segundos.

Observa-se que até os 23 segundos, o controlador manteve a resposta relativamente constante, aumentando o ciclo de trabalho com a redução da velocidade. Aos 22,5 segundos, a velocidade atingiu 75 RPM, com tensão eletromotriz de aproximadamente 9,9V. A partir desse ponto, observou-se uma queda acentuada na corrente de frenagem. Com a redução da velocidade, houve também uma menor variação do fluxo magnético e, conseqüentemente, uma menor tensão eletromotriz induzida. Por essa razão, em baixas velocidades, a tensão eletromotriz gerada pelo motor no modo de frenagem não foi suficiente para manter a corrente de referência e, conseqüentemente, a partir da Equação (11), o torque de frenagem constante.

A partir de uma análise da Equação (20), é possível observar que a corrente de frenagem depende de parâmetros construtivos do motor e da bateria, mas também da tensão eletromotriz, da tensão da bateria e da razão cíclica do conversor. Considerando que o conversor está limitado a uma razão cíclica D máxima de 80%, pode-se obter a corrente máxima de frenagem a partir da tensão da bateria e da força eletromotriz.

Considerações finais

O controlador foi projetado para operar a ponte inversora no modo de condução contínua (CCM), caracterizado pelo fato de a corrente de frenagem não zerar durante um período de chaveamento. Os resultados obtidos mostram que ele atendeu aos critérios pré-denidos, alcançando a estabilização da corrente no tempo esperado, sem sobressinal e conseguindo buscar erro zero em regime permanente. A constante de discretização de 1ms permitiu ao microcontrolador a execução do processamento necessário, garantindo o desempenho do controle.

Observou-se também que quando o motor opera em baixas velocidades, a tensão eletromotriz não é suficiente para manter a corrente de frenagem de acordo com a referência. Nessa região de baixa velocidade, a energia gerada é menor. O limite definido para a razão cíclica do conversor, as características elétricas da bateria e motor e a tensão real da bateria definem a velocidade mínima para determinada corrente de referência.

Para trabalhos futuros, sugere-se: a definição do limite de condução contínua e descontínua; a definição do limite de seguimento de referência em função da velocidade; a realização de estudo de sensibilidade de parâmetros de incerteza; e a operação do motor sob condições de sobrecarga e saturação. Na área de controle, sugere-se a implementação de controladores robustos que possam operar em uma gama mais ampla de condições da frenagem regenerativa.

REFERÊNCIAS

BHURSE, S. S.; BHOLE, A. A review of regenerative braking in electric vehicles. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATION OF POWER, ENERGY, INFORMATION AND COMMUNICATION (ICCPEIC), 2018, Chennai. *Anais [...]*. Chennai, 2018, p. 363-367. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICCPEIC.2018.8525157>. Acesso em: 6 out. 2025.

BROWN, W. *Brushless DC motor control made easy*. [S. l.: s. n.], 2002.

CATATA, E. O. H.; NETO, P. J. D. S.; BARROS, T. A. S.; FILHO, E. R. Modeling, control and regenerative braking of BLDC machines in electric bicycles. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA), 2020, [s. l.]. (Virtual). *Anais [...]*. São Paulo: sbabra, 2020. p. 1-8. Disponível em: https://www.sba.org.br/open_journal_systems/index.php/sba/article/view/1638. Acesso em: 6 nov. 2025.

ERICKSON, R. W.; MAKSIMOVIC, D. *Fundamentals of Power Electronics*. 3. ed. [S. l.]: Springer, 2020.

INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. *Global electric vehicle outlook 2024*. Paris: IEA, 2024. Disponível em: <https://www.iea.org/reports/global-ev-outlook-2024>. Acesso em: 5 out. 2025.

KIM, D.-K.; LEE, K.-W.; KWON, B.-I. Commutation torque ripple reduction in a position sensorless brushless DC motor drive. *IEEE Transactions on Magnetics*, [s. l.], v. 42, n. 6, p. 1762-1768, 2006. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/4012148/>. Acesso em: 5 out. 2025.

LATHI, B. *Sinais E Sistemas Lineares*. 2. ed. [S. l.]: Bookman, 2022.

MISAL, S. R.; BHASME, N. R. A review of multi-switch BLDC motor drive. *In*: INNOVATIONS IN POWER AND ADVANCED COMPUTING TECHNOLOGIES (I-PACT), 2017, Vellore, Índia. *Anais [...]*. Vellore, Índia, 2017. p. 1-7. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8245188/>. Acesso em: 5 out. 2025.

NIAN, X.; PENG, F.; ZHANG, H. Regenerative braking system of electric vehicle driven by brushless DC motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, [s. l.], v. 61, n. 10, p. 5798-5808, out. 2014. Disponível em: <https://galoa.com.br/blog/onde-encontrar-o-codigo-doi-de-uma-publicacao/>. Acesso em: 5 nov. 2025.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 5. ed. [S. l.]: Prentice Hall/Sp, 2010. ISBN 978-85-7605-810-6.

TAY SIANG FLUI; BASU, K.; SUBBIAH, V. Permanent magnet brushless motor control techniques. *In*: NATIONAL POWER ENGINEERING CONFERENCE, 2003, Cingapura. Proceedings. Cingapura: IEEE, 2003. p. 133-138. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1437432/>. Acesso em: 5 out. 2025.

XU, Y. *et al.* A novel inverter topology for brushless DC motor drive to shorten commutation time. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 63, n. 2, p. 796-807, fev. 2016. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7273873/>. Acesso em: 5 out. 2025.

ZHOU, X.; FANG, J. Precise braking torque control for attitude control flywheel with small inductance brushless DC motor. *IEEE Transactions on Magnetics*, New York, v. 28, n. 11, p. 5380-5390, nov. 2013. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/6451293/>. Acesso em: 5 out. 2025.

ŽULÍK, K. *et al.* Evaluation of driver's reaction time measured in driving simulator. *Sensors*, Basel, v. 22, n. 9, p. 3542, 2022. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1424-8220/22/9/3542>. Acesso em: 5 out. 2025.