

Fundamentos da radiolocalização por triangulação

*Fundamentals of Triangulation-Based Radiolocation
Fundamentos de la Radiolocalización por Triangulación*

RAFAEL SARAIVA CAMPOS¹

RESUMO

Este trabalho apresenta os fundamentos algébricos e geométricos da radiolocalização por triangulação, usando multilateração e multiangulação. A metodologia envolveu o uso de modelos geométricos básicos e métodos de solução, como a linearização por secantes e a aproximação por séries de Taylor, para estimativas de posição em cenários com resolução limitada nas medições e sem visada direta entre o transmissor e o receptor. Foram realizadas simulações computacionais para avaliar o desempenho de cada método sob diferentes configurações geométricas e condições de propagação, destacando as vantagens e limitações de cada técnica. Os resultados indicaram que as multilaterações circular e hiperbólica apresentaram boa convergência, embora a precisão do posicionamento dependa de fatores como a resolução das medições e a geometria dos nós-âncora.

Palavras-chave: nós-âncora; nós-alvo; triangulação; multilateração; multiangulação.

ABSTRACT

This work presents the algebraic and geometric fundamentals of triangulation-based radio-location using multi-lateration and multi-angulation. The methodology involved the use of basic geometric models and solution methods, such as linearization by secants and approximation through Taylor series, for position estimates in scenarios with limited measurement resolution and non-line-of-sight conditions between the transmitter and receiver. Computational simulations were performed to evaluate the performance of each method under dierent geometric configurations and propagation conditions, highlighting the advantages and limitations of each technique. The results indicated that circular and hyperbolic multi-lateration exhibited good convergence, although positioning accuracy depends on factors such as measurement resolution and anchor node geometry.

Keywords: anchor nodes; target nodes; triangulation; multi-lateration; multi-angulation.

RESUMEN

Este trabajo presenta los fundamentos algebraicos y geométricos de la radio-localización por triangulación mediante multi-lateración y multi-angulación. La metodología empleada incluyó el uso de modelos geométricos básicos y métodos de resolución, como la linealización por secantes y la aproximación por series de Taylor, para estimaciones de posición en escenarios con resolución limitada en las mediciones y sin línea de visión entre el transmisor y el receptor. Se realizaron simulaciones computacionales para evaluar el rendimiento de cada método bajo diferentes configuraciones geométricas y condiciones de propagación, destacando las ventajas y limitaciones de cada técnica. Los resultados indicaron que la multi-lateración circular e hiperbólica presentaron buena convergencia, aunque la precisión del posicionamiento depende de factores como la resolución de las mediciones y la geometría de los nodos ancla.

Palabras-Clave: nodos ancla; nodos objetivo; triangulación; multi-lateración; multi-angulación.

¹ Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9852-1362>.
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1114838283521313>. E-mail: rafael.campos@cefet-rj.br.



1 INTRODUÇÃO

Este artigo reúne e apresenta, de forma rigorosa, os fundamentos matemáticos (algébricos e geométricos) da radiolocalização (RL) por triangulação. Além disso, investiga, por meio de simulações no software MATLAB, o impacto de parâmetros sistêmicos (por exemplo, resolução de medidas de tempo e ângulo, número máximo de estações de referência), geométricos (como disposição relativa das estações de referência e do nó-alvo) e ambientais (condições de propagação no rádioelace em ambientes urbanos densos, urbanos e suburbanos) na acurácia da RL por triangulação. Tal esforço justifica-se pelo fato de que a triangulação, em suas diferentes formas, está por trás das estimativas de posição de uma ampla variedade de sistemas de RL, desde os sistemas globais de posicionamento e navegação via satélite – *Global Navigation Satellite Systems (GNSS)* –, até aplicações georreferenciadas em redes de sensores (kristalina et al., 2016), redes Wi-Fi (Wireless Fidelity) (Korogodin; Dneprov; Mikhaylova, 2019), e em redes de telefonia móvel celular (Campos, 2017).

A triangulação, como o nome sugere, emprega propriedades geométricas de triângulos para produzir estimativas de posição (Paziewski et al., 2021), e pode ser subdividida em duas categorias, dependendo do tipo de medição utilizada para o posicionamento: multilateração, que usa distâncias entre nós da rede, e multiangulação, que usa medidas de ângulos de chegada dos sinais.

O desempenho de todos os métodos de RL por triangulação depende fortemente de condições de propagação em linha de visada – *Non Line-Of-Sight (NLOS)* –. A ausência de visada direta – *Non Line-Of-Sight (NLOS)* – pode degradar severamente sua acurácia, ou, no caso da multiangulação, tornar impossível o seu uso. A acurácia dos métodos de RL por triangulação também é intimamente relacionada à disposição geométrica relativa dos nós-âncora (os nós de referência, cuja posição é conhecida a priori) e do nó-alvo (o nó a ser localizado). Essa relação é mais evidente no caso da multiangulação, ou localização por ângulo de chegada – *Angle of Arrival (AOA)* –, onde os nós-âncora e o nó-alvo não podem ser colineares.

A principal contribuição deste trabalho consiste na avaliação, por meio de simulações computacionais no ambiente MATLAB, do impacto de parâmetros geométricos (isto é, da disposição relativa dos nós-âncora e do nó-alvo) na acurácia da radiolocalização por triangulação. Essa abordagem permite investigar de forma quantitativa a inuênciia desses parâmetros no desempenho do posicionamento por multilateração e multiangulação, fornecendo subsídios para o projeto e a otimização de sistemas de posicionamento baseados em técnicas de triangulação.

2 MULTILATERAÇÃO

Na triangulação por multilateração, a posição do nó-alvo é estimada usando as distâncias entre ele e os nós-âncora. Essas distâncias podem ser obtidas a partir do tempo de percurso – *Time-Of-Flight* (TOF) – ou da atenuação de propagação entre o transmissor (Tx) e o receptor (Rx). No primeiro caso, a distância é fornecida diretamente pelo produto entre o TOF e a velocidade de propagação da luz no vácuo. No segundo caso, adota-se um modelo que expressa a perda de propagação em função da distância Tx-Rx, tomando-se então a equação da função inversa, ou seja, aquela que fornece a distância em função da atenuação de propagação. A multilateração pode ser classificada como circular ou hiperbólica, com base no tipo de linha de posição – *Line of Position* (LOP) – empregada. Na multilateração circular, cada nó-âncora é o centro de uma circunferência cujo raio é denido pela estimativa de distância até o nó-alvo. Na multilateração hiperbólica, cada par de nós-âncora são os focos de uma LOP hiperbólica.

2.1 Multilateração Circular

A multilateração circular emprega LOPs circulares. O raio de cada LOP é dado pela distância entre o nó-alvo e cada nó-âncora, calculada a partir do TOF ou das perdas de propagação no percurso. O nó-alvo é uma estação móvel cuja posição deve ser determinada. Um nó-âncora é um nó estacionário ou móvel da rede, cuja posição verdadeira deve ser conhecida todo o tempo e com o máximo grau de acurácia possível. Os nós-âncora são as estações envolvidas no cálculo da posição do nó-alvo. Esse cálculo pode ser baseado na rede, quando os nós-âncora usam os sinais transmitidos pelo nó-alvo para estimar sua posição, ou baseado na estação móvel, quando o nó-alvo usa os sinais transmitidos pelos nós-âncora para calcular sua própria posição.

O centro de cada LOP está localizado nas coordenadas do nó-âncora correspondente. Conforme a Figura 1A ilustra, a interseção de duas LOPs circulares pode conter mais de um ponto. Consequentemente, para obter uma estimativa de posição bidimensional (2D) sem ambiguidade, pelo menos três nós-âncora são requeridos. No caso tridimensional (3D), como no GPS, um quarto nó-âncora faz-se necessário. Para simplificar a apresentação dos fundamentos da RL por triangulação, esta e as subsequentes seções referem-se especificamente ao caso 2D, mas a extensão para o caso 3D é direta.

Tipicamente, devido a condições de propagação sem visada direta (NLOS) e a limitações sistêmicas, como a resolução nita das medidas de tempo e nível de sinal recebido – *Received Signal Strength* (RSS) – ou a falta de sincronização entre os nós-âncoras e alvo, as LOPs circulares não irão interceptar-se em um único ponto, o que signica que o sistema de equações não-lineares, que

representa este problema de localização, não tem solução de forma fechada (closed form). Nesse caso, a posição do nó-alvo pode ser fornecida pela solução de mínimos quadrados – *Least Squares* (LS) – do sistema de equações. Porém, como a solução LS de sistemas não-lineares pode ser computacionalmente custosa (SO, 2011), algum tipo de linearização é previamente aplicada, possibilitando o uso de LS linear – *Linear Least Squares* (LLS) – (Yang; Chen; Martin, 2011). Outra alternativa é retornar o centroide da região de conança (confidence region) formada pela intersecção das LOPs como a posição estimada do nó-alvo. A região de conança define a área do plano onde o nó-alvo provavelmente está localizado.

2.1.1 Utilizando medidas de tempo de chegada

O TOF é a duração do percurso do sinal eletromagnético do transmissor até o receptor. Também é conhecido como tempo de chegada – *Time Of Arrival* (TOA) –. O TOA pode ser medido no enlace reverso (*uplink*), onde o nó-âncora estima o TOF de um sinal transmitido pelo nó-alvo, ou no enlace direto(*downlink*), quando o nó-alvo mede o TOF de um sinal transmitido pelo nó-âncora. Em ambos os casos, faz-se necessária sincronização entre os nós-âncora e o nó-alvo.

Outra abordagem, que dispensa esse requisito, é a obtenção do TOA a partir do tempo de ida e volta – *Round Trip Time* (RTT) – do sinal entre cada nó-âncora e o nó-alvo. Nesse caso, qualquer nó pode iniciar a transmissão.

Ao multiplicar o valor de TOA pela velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas, aproximadamente igual à velocidade da luz no vácuo, isto é, $c = 2.998 \times 10^8$ m/s, obtém-se uma estimativa da distância entre os nós alvo e âncora. Essa distância é o raio de uma LOP circular centrada no nó-âncora. Inicialmente, o nó-alvo pode estar localizado em qualquer ponto ao longo desta LOP. Como a Figura 1A mostra, em condições hipotéticas de propagação LOS, e assumindo uma resolução infinita na medida do TOA, três LOPs circulares interceptariam em um único ponto, que seria a posição estimada do nó-alvo. Em condições NLOS, a intersecção das três LOPs fornece uma região de conança, que está hachurada na Figura 1B.

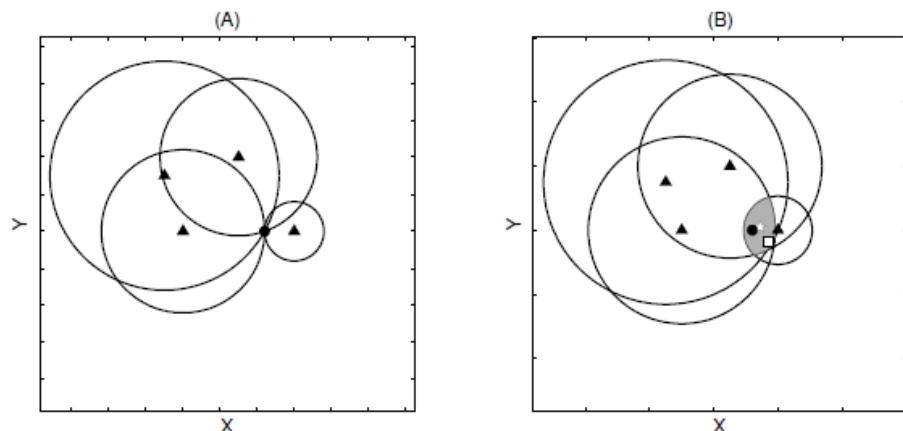


Figura 1 – Estimativas de posição usando multilateração circular em condições de propagação LOS (A) e NLOS (B). Os triângulos indicam as posições verdadeiras dos nós-âncora. A estrela indica o centroide da região de confiança. O quadrado mostra a posição estimada do nó-alvo calculada usando LLS. O círculo indica a localização verdadeira do nó-alvo.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A Figura 1A ilustra a geometria de uma multilateração circular em condições de propagação LOS, onde as quatro LOPs circulares interceptam-se em um único ponto. Porém, na realidade, mesmo em condições LOS, isso não ocorreria, devido à limitada resolução temporal das medidas de TOA. Consequentemente, como a Figura 2 mostra, as LOPs circulares são, na verdade, anéis circulares com largura $c\tau$, sendo τ a resolução da medida de TOA. Usualmente, τ é aproximadamente igual a $1/B$, sendo B a largura de banda do sinal. Por exemplo, para uma portadora de 20 MHz, tem-se $\tau = 50$ ns, o que resultaria em anéis circulares com 15 metros de largura. Neste cenário, mesmo sob condições LOS, não existiria um único ponto de intersecção, mas uma região de confiança em que o nó-alvo estaria localizado e que seria formada pela sobreposição dos anéis circulares, cujo centroide poderia ser usado com a estimativa de posição do nó-alvo. Quanto maior a largura de banda do sinal, menor o valor de τ , e tipicamente melhor a acurácia da multilateração circular.

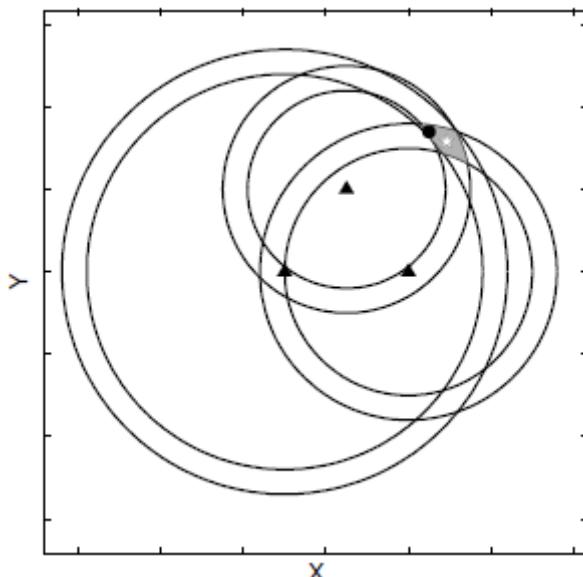


Figura 2 – LOPs na multilateração circular representadas como anéis circulares de largura $c\tau$. Os triângulos indicam as localizações verdadeiras dos nós-âncora. A estrela indica o centroide da região de conança. O círculo indica a posição verdadeira do nó-alvo.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Em condições NLOS e desconsiderando a resolução limitada da medida de TOA (o que é uma pressuposição razoável se $c\tau \ll d$), a estimativa da distância \hat{d}_i entre o nó-alvo e o i -ésimo nó-âncora é dada por $\hat{d}_i = c(t_i + n_i)$, onde t_i é o TOF em condições LOS (ou seja, seguindo uma linha reta entre os nós) entre o i -ésimo nó-âncora e o nó-alvo, e n_i é o atraso adicional aleatório devido às condições de propagação NLOS. Em condições LOS, $n_i = 0$, $\forall i, i = 1, \dots, N$, onde N é o número de nós-âncora.

A equação da circunferência centrada no i -ésimo nó-âncora e com raio \hat{d}_i é dada por $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = \hat{d}_i^2$, onde (x_i, y_i) são as coordenadas 2D do i -ésimo nó-âncora. Para obter uma estimativa de posição do nó-alvo, pelo menos três nós-âncora são requeridos. Para o caso geral, que a Figura 1B ilustra, com $N \geq 3$, obtém-se o sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= \hat{d}_1^2 \\ &\vdots \\ (x - x_N)^2 + (y - y_N)^2 &= \hat{d}_N^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Devido à propagação NLOS, este sistema de equações não tem solução de forma fechada (*closed form*). Após a linearização, pode-se encontrar uma solução LLS. Algumas das alternativas para a linearização são expansão em séries de Taylor (truncadas após o termo linear) ou o uso de

linhas secantes. Porém, a linearização usando linhas secantes é mais simples e usualmente provê maior acurácia (Caffery, 2000).

A linearização usando linhas secantes baseia-se num princípio geométrico simples. Duas LOPs circulares podem se interceptar em dois pontos, que denem uma reta secante a ambos os círculos. A primeira equação do sistema não-linear da Eq. (1) é subtraída de todas as demais equações do sistema. Após alguma manipulação algébrica, obtém-se o sistema a seguir, com $(N - 1)$ equações lineares, onde a j -ésima equação, $j = 1, 2, \dots, (N - 1)$, representa a equação da secante denida pela interseção da primeira e da $(j + 1)$ -ésima LOPs circulares.

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \dots & \dots \\ x_N - x_1 & y_N - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + \hat{d}_1^2 - \hat{d}_2^2 \\ \dots \\ x_N^2 - x_1^2 + y_N^2 - y_1^2 + \hat{d}_1^2 - \hat{d}_N^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Três nós-âncora produzem duas linhas secantes que interceptam-se em um único ponto, mesmo em condições de propagação NLOS, como a Figura 3A indica. A utilização do TOA de mais de três nós-âncora pode aumentar a acurácia do posicionamento, porém, para $N > 3$, o sistema de equações lineares resultante é sobre-determinado, uma vez que ele tem mais de duas equações linearmente independentes, mas apenas duas variáveis. Sistemas sobre-determinados não têm uma solução de forma fechada e, nesse caso, como a Figura 3B mostra, as linhas secantes não se interceptam em um ponto único, denindo então uma região de conança para o posicionamento.

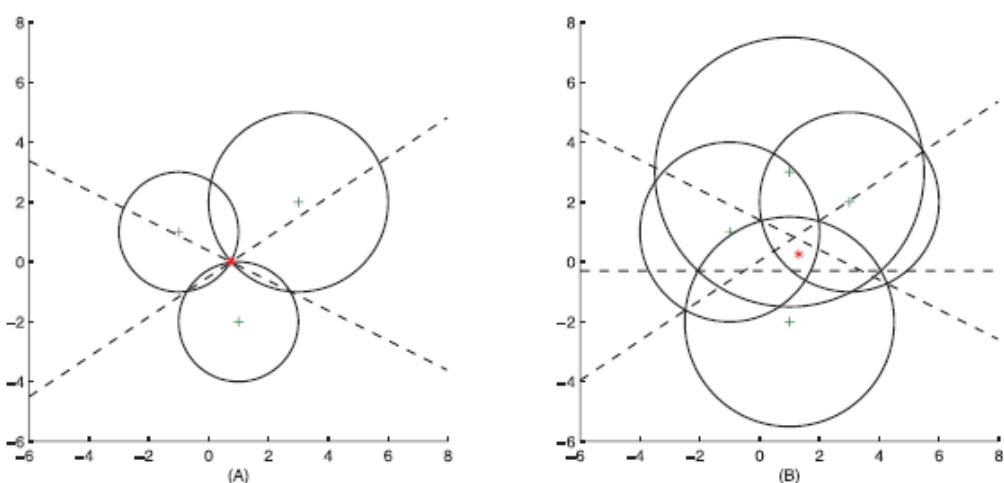


Figura 3 – Linearização usando linhas secantes com $N = 3$ (A) e $N = 4$ (B), ambas em condições NLOS.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A estimativa de posição do nó-alvo pode ser dada pelo centroide dessa região, ou pela solução LLS do sistema de equações lineares denido na Eq. (2). A solução LLS é dada por:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{V}} \quad (3)$$

onde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \dots & \dots \\ x_N - x_1 & y_N - y_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + \hat{d}_1^2 - \hat{d}_2^2 \\ \dots \\ x_N^2 - x_1^2 + y_N^2 - y_1^2 + \hat{d}_1^2 - \hat{d}_N^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

O desempenho de métodos TOA em condições NLOS pode ser avaliado por simulações computacionais. Para tal, faz-se necessário modelar estatisticamente o atraso adicional devido à propagação NLOS. Considerando o cenário de uma rede de telefonia móvel celular, a comunicação full-duplex é implementada por duplexação por divisão de frequência – *Frequency Division Multiplexing* (FDD) –, onde utilizam-se faixas de frequência distintas para transmissão e recepção simultâneas de dados. Nas redes celulares, a separação entre as frequências dos enlaces direto (*downlink*) e reverso (*uplink*) é suficientemente grande (maior ou igual a 45 MHz) para que se possa assumir independência entre os múltiplos percursos de propagação nos dois enlaces, para qualquer posição do nó-alvo. Assim, os valores médios dos atrasos de propagação dos múltiplos percursos no *downlink* ($\tau_{m,d}$) e *uplink* ($\tau_{m,u}$) podem ser tratados como variáveis aleatórias independentes (Campos; Lovisolo, 2009). Seus valores são sempre positivos, uma vez que a propagação NLOS sempre resulta em uma *bias* positivo na estimativa de TOA. Em ambos os enlaces, o atraso médio τ_m pode ser modelado como uma variável aleatória com distribuição log-normal, isto é:

$$\tau_m = k T_0 D^\epsilon X \quad (5)$$

onde k é a constante de proporcionalidade entre τ_m e τ_{rms} , que é a raiz média quadrática – *Root Mean Square* (RMS) – do atraso adicional de propagação, T_0 é o valor médio de τ_{rms} para $D=1$ km, D é a distância em quilômetros entre os nós alvo e de referênci, e ϵ é uma constante. X é uma variável aleatória com distribuição log-normal a uma distância D , de tal modo que $\ln(X)$ tem distribuição normal com média zero e desvio padrão σ . Os valores de T_0 , k , ϵ e σ dependem do tipo de ambiente

de propagação (Yangseok; Heungryeol; Chungyong, 2001). Para um conjunto de n observações (isto é, componentes de multipercuso recebidas),

$$\tau_{rms} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2 (\tau_i - \tau_a)^2}{P_t}}, \quad (6)$$

onde α_i e τ_i são a amplitude e atraso da i -ésima componente de multipercuso, e P_t é a potência total do perl de atraso, dada por

$$P_t = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2. \quad (7)$$

O parâmetro τ_a é o momento de primeira ordem dos atrasos de multipercuso, dado por

$$\tau_a = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2 \tau_i}{P_t}. \quad (8)$$

Se o TOA é medido no enlace direto ou reverso, então a Eq. (5) pode ser aplicada diretamente na modelagem do atraso adicional NLOS. Se o TOA é obtido a partir de medidas de RTT, então o atraso médio adicional pode ser dado por (Campos; Lovisolo, 2009):

$$\tau_m = \frac{\tau_{m,d} + \tau_{m,u}}{2} = \frac{k T_0 d_i^\epsilon (X_d + X_u)}{2} \quad (9)$$

onde $\tau_{m,d}$ e $\tau_{m,u}$ são os atrasos médios adicionais no *downlink* e *uplink*, respectivamente e X_d e X_u são variáveis aleatórias log-normais independentes a uma distância d_i , ambas com média zero e desvio padrão σ .

As Figuras 4 e 5 ilustram os mapas de erro médio de localização em condições NLOS para dois conjuntos de nós-âncora. Na Figura 4, os nós-âncora ocupam os vértices de um triângulo equilátero, enquanto na Figura 5 eles são quase colineares. Cada mapa representa uma região de 500 × 500 m², com resolução de 10 metros. Para construção do mapa, posicionou-se o nó-alvo sobre cada pixel, calculando-se então o erro médio de 10 estimativas de posição (logo, para cada mapa foi calculado um total de 50×50×10 = 25000 estimativas de posição). O atraso adicional NLOS foi modelado usando a Eq. (9) com $k = 0.5$, $T_0 = 0.28 \mu\text{s}$, $\sigma = 2 \text{ dB}$, $\epsilon = 0.5$. A localização retornada pelo método é o centroide da região de conança delimitada pela interseção das LOPs circulares.

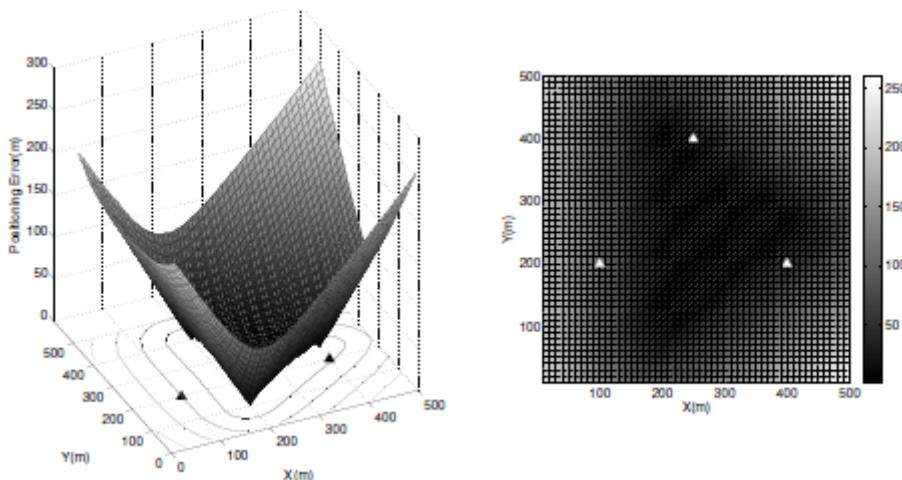


Figura 4 – Mapa de erro médio do posicionamento TOA usando o centroide da região de conança. Os nós-âncora (triângulos) estão dispostos formando um triângulo equilátero.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

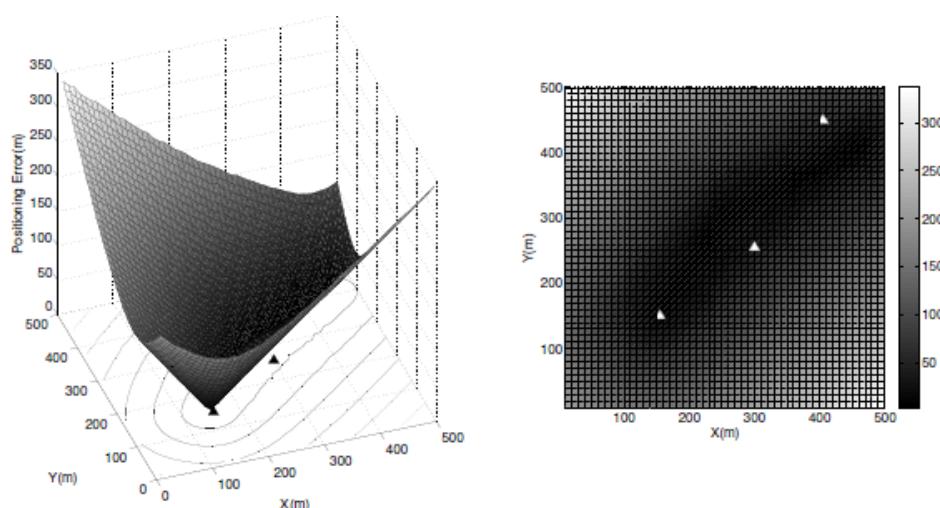


Figura 5 – Mapa de erro médio do posicionamento TOA usando o centroide da região de conança. Os nós-âncora (triângulos) são aproximadamente colineares.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

As Figuras 4 e 5 mostram que o erro médio de localização é menor quando o nó-alvo está situado dentro do polígono convexo formado pelos nós-âncora. No segundo mapa, onde os nós-âncora são aproximadamente colineares, isto significa que o erro é menor ao longo reta de melhor ajuste das posições dos nós-âncora. Em ambos os casos, quanto maior a distância entre o nó-alvo e os nós-âncora, maior o erro de localização. Ou seja, a acurácia do posicionamento TOA depende da disposição geográfica relativa dos nós (alvo e âncoras), e será degradada em áreas com baixa densidade de nós-âncora.

2.1.2. Usando Medidas de Nível de Sinal Recebido

Se a potência média da estação transmissora é aproximadamente constante, e se o RSS pode ser medido na estação receptora, então é possível estimar a distância entre as estações a partir da atenuação de propagação no rádio-enlace. Para tal, a perda de propagação deve ser expressa como uma função f da distância. Uma vez denida f , a distância entre o transmissor e o receptor pode ser calculada pela função inversa $g = f^{-1}$, que fornece a distância em função da perda de propagação.

O ponto de partida é a equação de balanço de potência do enlace (*link power budget*) entre o i -ésimo nó-âncora e o nó-alvo, que é denida na escala logarítmica por

$$P_{t,i} - L_{t,i} + G_{t,\theta,\phi,i} - L_{p,i} + G_{r,(\theta\pm\pi),(\phi\pm\pi),i} - L_{r,i} = \text{RSS}_i, \quad (10)$$

onde $P_{t,i}$ é a potência (dBm) de transmissão do i -ésimo nó-âncora; $L_{t,i}$ e $L_{r,i}$ são as perdas (dB) no transmissor e receptor, respectivamente; $G_{t,\theta,\phi,i}$ e $G_{r,(\theta\pm\pi),(\phi\pm\pi),i}$ são os ganhos (dB) das antenas transmissora e receptora, respectivamente, na direção especificada pelo ângulo horizontal θ e pelo ângulo vertical ϕ , conforme ilustrado pela Figura 6.

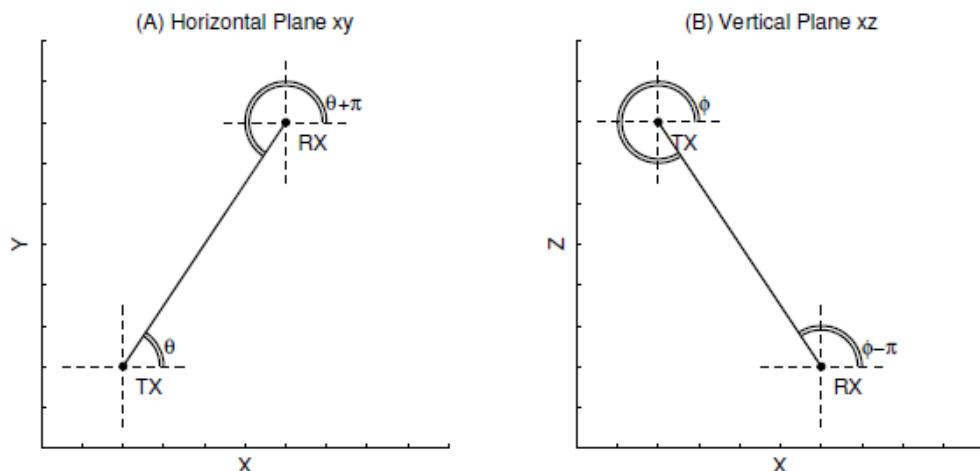


Figura 6 – Ângulos (A) horizontal (ângulo θ , plano xy) e (B) vertical (ângulo ϕ , plano xz) denindo os percursos 3D LOS conectando dois nós.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Os valores de $G_{t,\theta,\phi,i}$ e $G_{r,(\theta\pm\pi),(\phi\pm\pi),i}$ dependem dos diagramas de radiação das antenas. $L_{p,i}$ é a atenuação (dB) de propagação entre o i -ésimo nó-âncora e o nó-alvo. Isolando o termo da perda de propagação, obtém-se

$$L_{p,i} = P_{t,i} - \text{RSS}_i - L_{t,i} - L_{r,i} + G_{t,\theta,\phi,i} + G_{r,(\theta\pm\pi),(\phi\pm\pi),i}. \quad (11)$$

Em seguida, é necessário definir um modelo matemático de propagação que expresse $L_{p,i}$ como uma função f da distância d_i entre o nó-alvo e o i -ésimo nó-âncora. A inversa desta função, $g = f^{-1}$, fornece a distância \hat{d}_i em função da perda de propagação $L_{p,i}$, ou seja, $\hat{d}_i = g(L_{p,i}) = f^{-1}(L_{p,i})$. Um dos mais simples modelos de propagação é o modelo de perda log-normal (Lee; Buehrer, 2011), denido por

$$L_{p,i} = f(d_i) = L_{d_0} + 10n \log_{10}(d_i/d_0) + \chi_\sigma, \quad (12)$$

onde L_{d_0} é a atenuação de propagação a uma distância de referência d_0 do transmissor, e n é o expoente da perda de propagação. O termo χ_σ é revelado a partir de uma distribuição Gaussiana, com média nula e desvio padrão σ (Fan; Du, 2022), e representa a perda randômica por sombreamento, devido à presença de obstáculos ao longo do rádioenlace.

A equação do modelo log-normal expressa a perda média de propagação em função da distância. Para obter sua inversa, basta isolar o termo da distância. Tem-se então a estimativa para a distância Tx-Rx dada por

$$\hat{d}_i = g(L_{p,i}) = d_0 \times 10^{(L_{p,i}(dB) - L_{d_0} - \chi_\sigma)/10n}. \quad (13)$$

A distância de referência d_0 e o expoente de perda de propagação n podem ser empiricamente ajustados para diferentes frequências de transmissão e ambientes de propagação (Stüber, 2017).

O modelo de propagação empírico de Okumura-Hata é um dos mais amplamente empregados para predição de rádiopropagação em enlaces ponto-área nas bandas VHF (Very-High Frequency) e UHF (Ultra-High Frequency) em ambientes urbanos e suburbanos (Hata, 1980). A perda média de propagação deste modelo para ambientes urbanos é dada por

$$L_{p,i} = 69.55 + 26.16 \log_{10}(f) - 13.82 \log_{10}(h_b) - a(h_m) + (44.9 - 6.55 \log_{10}(h_b)) \log_{10}(d_i) \quad (14)$$

onde f é a frequência central da portadora ($150 \leq f \leq 1500$ MHz), h_m e h_b são as alturas efetivas das antenas da estação móvel e da estação rádio-base, respectivamente ($1 \leq h_m \leq 10$ m; $30 \leq h_b \leq 200$ m); $a(h_m)$ é o fator de correção para h_m , que é zero para $h_m = 1.5$ metros. Isolando o termo d_i e assumindo $h_m = 1.5$ metros, obtém-se:

$$\hat{d}_i = 10^{(L_{p,i} - 69.55 - 26.16 \log_{10}(f) + 13.82 \log_{10}(h_b))/(44.9 - 6.55 \log_{10}(h_b))} \quad (15)$$

Uma vez estimadas as distâncias \hat{d}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, um sistema de equações não-lineares como o da Eq. (1) é obtido. Sua solução numérica aproximada pode ser obtida do mesmo modo que no posicionamento TOA, utilizando a solução LLS dada pela Eq. (3).

A multilateração circular baseada em RSS tem a vantagem de não requerer sincronização entre os nós-âncora e o nó-alvo, como é o caso no posicionamento TOA. Porém, estimar de modo preciso a perda de propagação no enlace, mesmo quando um modelo empírico cuidadosamente calibrado é empregado, é difícil, pois, como a posição do nó-alvo não é conhecida a priori, não é possível saber os valores dos ângulos θ e ϕ (ver Figura 6). Consequentemente, não é possível calcular a potência isotrópica efetivamente irradiada – *Effective Isotropic Radiated Power* (EIRP) – pela antena transmissora na direção do nó-alvo, que é denida por $EIRP = P_{t,i} - L_{t,i} + G_{t,\theta,\phi,i}$. Note-se que a denição da EIRP envolve os 3 primeiros termos da Eq. (10). Essa imprecisão intrínseca no cálculo da EIRP na direção de interesse reetir-se-á no cálculo da atenuação de propagação, o que por sua vez resultará em degradação da acurácia do posicionamento baseada nas medidas de RSS. Além disso, os obstáculos eventualmente bloqueando a linha de visada direta entre o nó-alvo e o nó-âncora também não podem ser conhecidos a priori, pois a posição do nó-alvo não é conhecida. Tais obstruções introduzem perdas adicionais de propagação, o que resultará em uma super-estimação da distância entre os nós transmissor e receptor. Essas limitações (isto é, o desconhecimento da EIRP na direção do nó-alvo e dos obstáculos no percurso de visada direta entre o nó-âncora e o nó-alvo) resultam em grandes erros de localização quando utilizando a multilateração circular baseada em RSS, exceto em ambientes bem controlados (Vallet *et al.*, 2013).

2.2 Multilateração Hiperbólica

A multilateração hiperbólica é um tipo de localização por diferença de distância – *Range Difference Location* (RDL) –. Nela, a diferença de tempo de chegada – *Time Difference of Arrival* (TDOA) – entre os sinais de dois nós-âncora, recebidos no nó-alvo, multiplicada pela velocidade de propagação das ondas de rádio, fornece a diferença das distâncias entre o nó-alvo e cada um dos dois nós-âncora. Essa diferença define uma LOP hiperbólica cujos focos estão localizados nos dois nós-âncora. A estimativa de posição do nó-alvo é obtida pela interseção das LOPs hiperbólicas. No entanto, duas hipérboles podem se interceptar em dois pontos distintos, sendo portanto necessária uma terceira hipérbole para fornecer uma estimativa não ambígua. Como cada par de nós-âncora gera uma hipérbole, são necessárias pelo menos quatro estações de referência.

A multilateração hiperbólica, ou posicionamento TDOA, apresenta uma vantagem em relação aos sistemas baseados em TOA, pois não exige sincronização rigorosa entre o nó-alvo e os nós-âncora. A sincronização é necessária apenas entre as estações âncora envolvidas na determinação da posição. O TDOA é um dos métodos de posicionamento suportados por redes celulares de terceira geração (3GPP, 2001), além de ser usada na rede terrestre eLORAN (Enhanced Long-Range

Navigation), que é um sistema de navegação que emprega uma rede de transmissores de baixa frequência (90 a 110 KHz) e que serve como backup para sistemas GNSS (Yang *et al.*, 2025).

A Figura 7A apresenta três nós-âncora e duas hipérboles (LOP12 e LOP13). Os nós-âncora 1 e 2 estão situados nos focos da primeira hipérbole (LOP12), enquanto os nós 1 e 3 estão nos focos da segunda (LOP13). Uma terceira hipérbole é denida pelos nós 2 e 3. A Figura 7B ilustra o efeito da resolução nita das medições de TDOA: as LOPs hiperbólicas tornam-se regiões hiperbólicas. A estimativa da posição do nó-alvo pode ser obtida pelo centroide da região de conança formada pela interseção das duas regiões hiperbólicas.

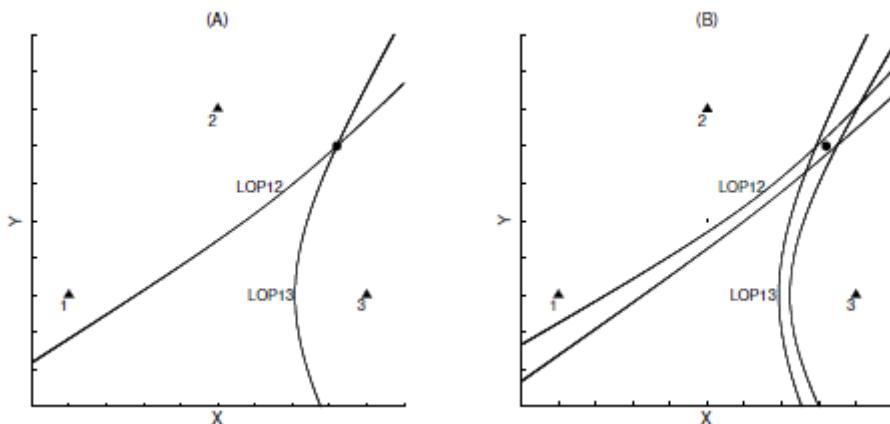


Figura 7 – Multilateração hiperbólica, considerando resolução temporal (A) innita e (B) - nita. Os triângulos indicam as coordenadas (ground-truth) dos nós-âncora. O círculo indica a posição estimada do nó-alvo.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O TDOA pode ser medido no *uplink* ou no *downlink*. Para simplificar a exposição, considerar-se-á somente a última alternativa. Porém, o procedimento para as medições no *uplink* é análogo. Seja Δt_{ij} o TDOA, medido em condições LOS no nó-alvo, entre os sinais do i -ésimo e j -ésimo nós-âncora, $i \neq j; i, j = 1, \dots, N$, esse N é o número de nós-âncora. Seja \hat{d}_i a distância estimada (em condições NLOS) entre o nó-alvo e o i -ésimo nós-âncora, desconsiderando a resolução finita das medidas de TDOA, tem-se $\Delta t_k = (\hat{d}_i - \hat{d}_j) = c (\Delta t_{ij} + n_{ij})$, onde c é a velocidade da luz no espaço livre, n_{ij} é o ruído aditivo na medida de Δt_{ij} (isto é, o atraso adicional devido à propagação NLOS), e $k = 1, \dots, M$, onde M é o número de LOPs hiperbólicas. Note-se que, como cada par de nós-âncora define uma hipérbole, esse número é igual à quantidade de combinações de N elementos tomados 2 a 2. A matriz $M \times 1$ de diferenças de distâncias é denida por:

$$\Delta \hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} c(\Delta t_{12} + n_{12}) \\ c(\Delta t_{13} + n_{13}) \\ \vdots \\ c(\Delta t_{1M} + n_{1M}) \\ c(\Delta t_{23} + n_{23}) \\ \vdots \\ c(\Delta t_{(M-1)M} + n_{(M-1)M}) \end{bmatrix} = c\Delta\mathbf{T} + \mathbf{N} \quad (16)$$

onde $\Delta\mathbf{T}$ é a matriz de valores de TDOA em condições LOS, dada por:

$$\Delta\mathbf{T} = [\Delta t_{12} \ \Delta t_{13} \ \dots \ \Delta t_{1M} \ \Delta t_{23} \ \dots \ \Delta t_{(M-1)M}]^T \quad (17)$$

e $\mathbf{N} = c [n_{12} \ n_{13} \ \dots \ n_{1M} \ n_{23} \ \dots \ n_{(M-1)M}]^T$ é a matriz dos erros nas estimativas de distância devido ao atraso adicional introduzido pelas condições de propagação NLOS.

A equação da hipérbole cujos focos estão situados no i -ésimo e j -ésimo nós-âncora, $i \neq j$, é dada por $\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} = c\Delta t_{ij}$, onde $[x_i \ y_i]^T$ são as coordenadas *ground-truth* da i -ésima e j -ésima estações de referência, e $\mathbf{S} = [x \ y]^T$ são as coordenadas *ground-truth* do nó-alvo. Para uma localização nãoambígua, pelo menos 4 nós-âncora são requeridos. Para o caso geral, com $N \geq 4$, obtém-se o sistema de equações não-lineares:

$$\mathbf{F}(\mathbf{S}) = c\Delta\mathbf{T} \quad (18)$$

onde

$$\mathbf{F}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \\ \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \\ \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} - \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x - x_{(M-1)})^2 + (y - y_{(M-1)})^2} - \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Substituindo a Eq. (18) na Eq. (16), e isolando o vetor de erro, obtém-se:

$$\mathbf{N} = \Delta \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{F}(\mathbf{S}) \quad (20)$$

Devido às condições de propagação sem linha de visada, o sistema de equações da Eq. (18) não tem solução exata, ou seja, as hipérboles não se interceptam em um único ponto. Nesse caso, a posição do nó-alvo pode ser estimada pela solução LS do sistema não-linear. A solução LS $\hat{\mathbf{S}} = [\hat{x} \ \hat{y}]^T$ é aquela que minimiza o erro quadrático $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$, isto é:

$$\hat{\mathbf{S}} = \arg \min_{\mathbf{S}} \left\{ (\Delta \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{F}(\mathbf{S}))^T (\Delta \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{F}(\mathbf{S})) \right\} \quad (21)$$

Há diferentes abordagens para a solução deste problema. Gustafsson e Gunnarsson (2003) aplicam um método de posicionamento baseado em simulação de Monte Carlo e um algoritmo de busca por gradiente, formulado no contexto de LS não-lineares, ao problema de localização baseada em TDOA. Porém, como indicado na Seção 2.1, a solução LS não-linear pode ser computacionalmente custosa. Assim, alguma forma de linearização do sistema da Eq. (18) é desejável.

A linearização pelo uso de linhas secantes usada na Seção 2.1.1 para o posicionamento baseado em TOA não é aplicável nesse caso. Assim, a linearização será implementada através da expansão em Séries de Taylor (Buehrer; Venkatesh, 2011). Esse é um método iterativo, que requer uma estimativa inicial $\hat{\mathbf{S}}_0 = [\hat{x}_0 \ \hat{y}_0]^T$ para a posição do nó-alvo. Cada equação é linearizada após a eliminação dos termos não-lineares da série. A expansão em Série de Taylor, da função $F_k(S)$, $k = 1, 2, \dots, M$, após a eliminação dos termos não-lineares e usando a estimativa inicial $\hat{\mathbf{S}}_0$, é dada por:

$$F_k(S) \approx F_k(\hat{\mathbf{S}}_0) + \frac{\partial F_k(S = \hat{\mathbf{S}}_0)}{\partial x} (x - \hat{x}_0) + \frac{\partial F_k(S = \hat{\mathbf{S}}_0)}{\partial y} (y - \hat{y}_0), \quad (22)$$

obtém-se então uma aproximação linear para o vetor \mathbf{F} , dada por:

$$\mathbf{F}(S) \approx \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_0) + \mathbf{H}(S - \hat{\mathbf{S}}_0) \quad (23)$$

onde a matriz $\mathbf{H}_{M \times 2}$ é dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(S = \hat{\mathbf{S}}_0)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(S = \hat{\mathbf{S}}_0)}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_M(S = \hat{\mathbf{S}}_0)}{\partial x} & \frac{\partial F_M(S = \hat{\mathbf{S}}_0)}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

Substituindo a Eq. (23) na Eq. (20), obtém-se:

$$\mathbf{N} = \Delta\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_0) - \mathbf{H}(\mathbf{S} - \hat{\mathbf{S}}_0) = (\Delta\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_0) + \mathbf{H}\hat{\mathbf{S}}_0) - \mathbf{HS} \quad (25)$$

onde o primeiro termo

$$\Delta\tilde{\mathbf{R}} = \Delta\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_0) + \mathbf{H}\hat{\mathbf{S}}_0 \quad (26)$$

é função da estimativa inicial $\hat{\mathbf{S}}_0$ e de $\Delta\hat{\mathbf{R}}$. O vetor \mathbf{N} pode então ser expresso por:

$$\mathbf{N} = \Delta\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{HS}. \quad (27)$$

Substituindo a Eq. (27) na Eq. (21), obtém-se:

$$\hat{\mathbf{S}} = \arg \min_{\mathbf{S}} \left\{ (\Delta\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{HS})^T (\Delta\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{HS}) \right\}. \quad (28)$$

A solução LLS da Eq. (28) é dada por:

$$\hat{\mathbf{S}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \Delta\tilde{\mathbf{R}}. \quad (29)$$

Substituindo a Eq. (26) na Eq. (29), tem-se:

$$\hat{\mathbf{S}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T (\Delta\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_0) + \mathbf{H}\hat{\mathbf{S}}_0) = \hat{\mathbf{S}}_0 + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T (\Delta\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_0)). \quad (30)$$

Então, da estimativa inicial $\hat{\mathbf{S}}_0$ obtém-se outra estimativa $\hat{\mathbf{S}}$, que, se o processo iterativo for convergente (como ilustrado na Figura 8), estará mais próxima da solução ótima do problema de minimização.

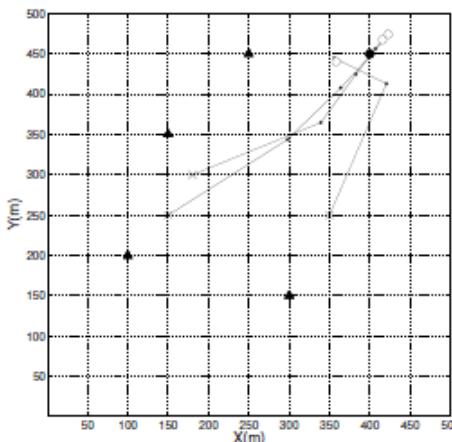


Figura 8 – Multilateração hiperbólica usando LLS com linearização por Série de Taylor: a figura mostra a convergência do método iterativo para três estimativas iniciais de posição (x). As soluções são indicadas pelos círculos brancos. As coordenadas verdadeiras (*ground-truth*) dos nós-âncora são indicadas por triângulos negros, e do nó-alvo por um círculo negro. O atraso adicional NLOS foi calculado usando a Eq. (9) com parâmetros $k = 0.5$, $T_0 = 0.28 \mu\text{s}$, $\sigma = 2 \text{ dB}$, $\epsilon = 0.5$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Este processo iterativo pode ser descrito por:

$$\hat{\mathbf{S}}[n+1] = \hat{\mathbf{S}}[n] + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T (\Delta \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}[n])). \quad (31)$$

A solução LLS com linearização por Série de Taylor tem uma complexidade computacional inferior àquela de abordagens LS não-lineares (Lee; Buehrer, 2011), porém, por ser um processo iterativo, requer uma estimativa inicial para a localização do nó-alvo. A Figura 9 traz uma análise da convergência desse processo, para três diferentes disposições geométricas dos nós-âncora (triângulos brancos): irregular (A,B), aproximadamente colinear (C,D), e formando um quadrado (E,F). Para construção do mapa, selecionou-se uma posição (*ground-truth*) para o nó-alvo (círculo branco) dentro (A,C,E) e fora (B,D,F) do polígono convexo formado pelos nós-âncora. Cada mapa representa uma região de $500 \times 500 \text{ m}^2$, com resolução de 1 metro, e foi construído assumindo o i -ésimo pixel, $i = 1, \dots, 250000$, como a estimativa inicial para o método iterativo, calculando então o erro médio de 10 estimativas de posição, modelando o atraso adicional NLOS em cada uma delas como uma variável aleatória, segundo a Eq. (9), com $k = 0.5$, $T_0 = 0.28 \mu\text{s}$, $\sigma = 2 \text{ dB}$, $\epsilon = 0.5$. A convergência depende da geometria do problema, e uma estimativa inicial que leva à convergência numa configuração, não necessariamente terá o mesmo resultado em outra. Porém, os mapas de convergência indicam que, independentemente das localizações verdadeiras relativas dos nós-âncora e alvo, se o centroide do polígono convexo formado pelos nós-âncora for usado como estimativa inicial para a localização

do nó-alvo, o processo iterativo irá convergir. Mesmo que não se possa armar que isso se vericará para qualquer conguração geométrica dos nós, os resultados ilustrados pela Figura 9 sugerem que essa será uma boa estimativa inicial.

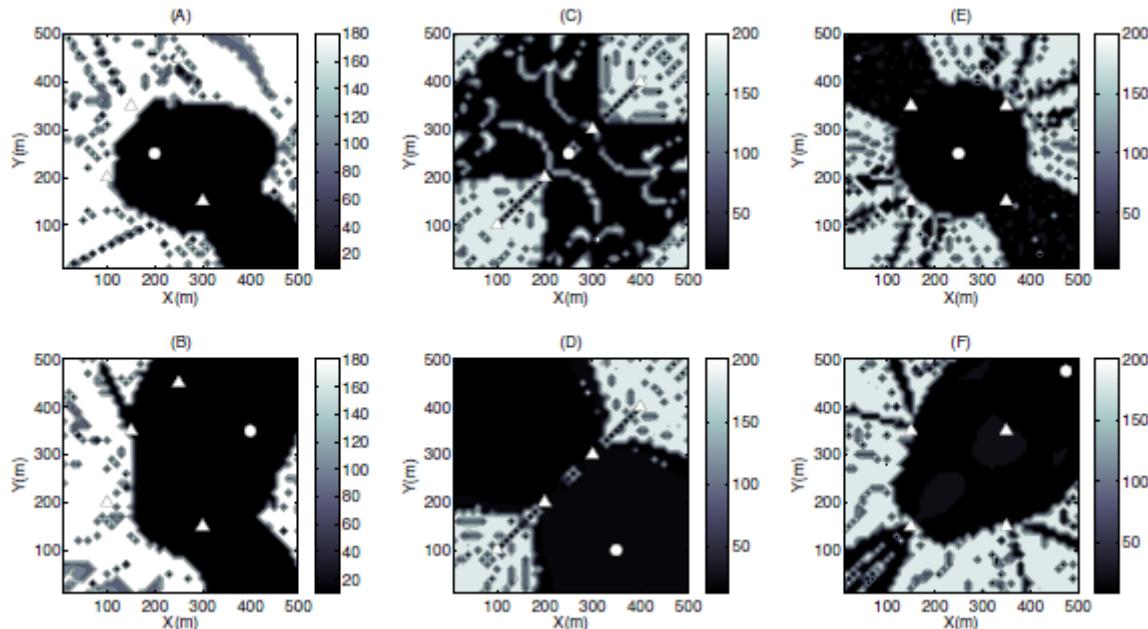


Figura 9 – Análise da convergência do método LLS, com linearização por Série de Taylor, para a localização por multilateração hiperbólica. Os pixels escuros indicam as coordenadas $S_p = (x_p, y_p)$, $x_p \in [1, 2, 3, \dots, 500]$ e $y_p \in [1, 2, 3, \dots, 500]$, que, quando usadas como estimativas iniciais de posição para o nó-alvo, resultam em convergência do método iterativo para a posição verdadeira (ou sua vizinhança) do nó-alvo. Fora dessa região de convergência, o erro na localização é muito alto, sendo por isso representado na escala logarítmica, ou seja, $10 \log_{10} e (m)$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

As Figuras 10 e 11 trazem os mapas de erro da localização TDOA em condições NLOS para duas congurações geométricas distintas dos nós-âncora. Esses mapas foram construídos sobre a mesma região, com a mesma resolução, e usando os mesmos parâmetros para a modelagem estatística do atraso adicional NLOS que os mapas das Figuras 4 e 5. Na Figura 10, os nós-âncora formam um quadrado. Na Figura 11, os nós-âncora são colineares. As estimativas de posição foram produzidas usando LLS com linearização por Série de Taylor, sempre adotando como estimativa inicial do processo iterativo o centroide do polígono convexo formado pelos nós-âncora.

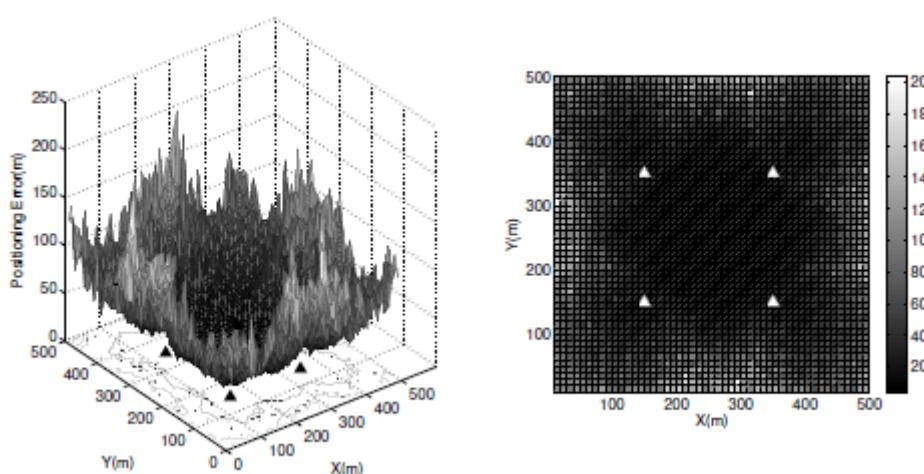


Figura 10 – Mapa de erro do posicionamento TDOA usando LLS com linearização por série de Taylor. Os nós-âncora (triângulos brancos) ocupam os vértices de um quadrado.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

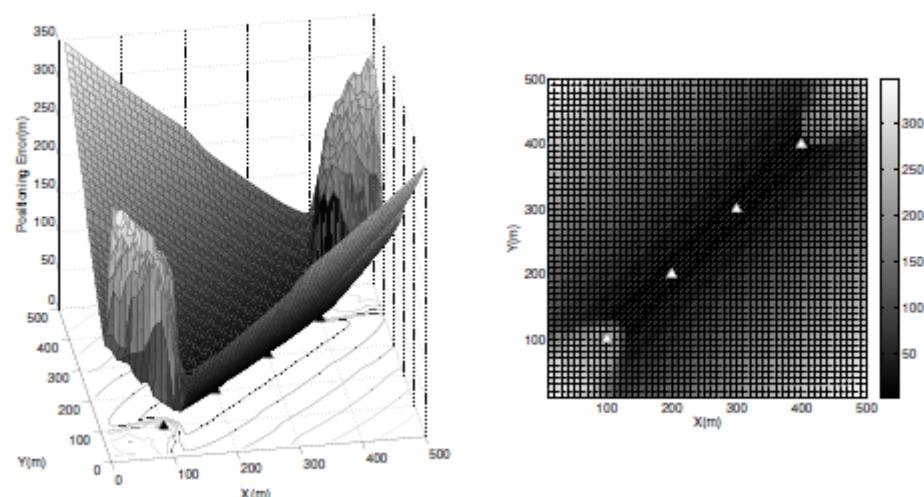


Figura 11 – Mapa de erro do posicionamento TDOA usando LLS com linearização por série de Taylor. Os nós-âncora (triângulos brancos) são colineares.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

As Figuras 10 e 11 mostram que o erro médio de localização é menor quando o nó-alvo está situado no interior do polígono convexo formado pelos nós-âncora. No segundo mapa, onde os nós-âncora são dispostos linearmente, isso significa que o erro será menor ao longo da reta, conectando os nós-âncora. Em ambos os casos, quanto maior a distância entre o nó-alvo e os nós-âncora, maior o erro médio de posicionamento. Consequentemente, o posicionamento TDOA terá pior desempenho em áreas com baixa densidade de estações de referência, especialmente se o nó-alvo

estiver situado fora do polígono convexo formado pelos nós-âncora. Note-se que essas conclusões são análogas àquelas alcançadas na Seção 2.1.

3 MULTIANGULAÇÃO

O posicionamento por multiangulação emprega medidas de AOA para estimar a posição do nó-alvo. Com os ângulos em relação a duas estações âncora, a localização do nó-alvo é dada pela interseção das LOPs lineares – *Linear LOPs* (LLOPs) – conectando o nó-alvo a cada nó-âncora. A Figura 12A ilustra a geometria do posicionamento AOA.

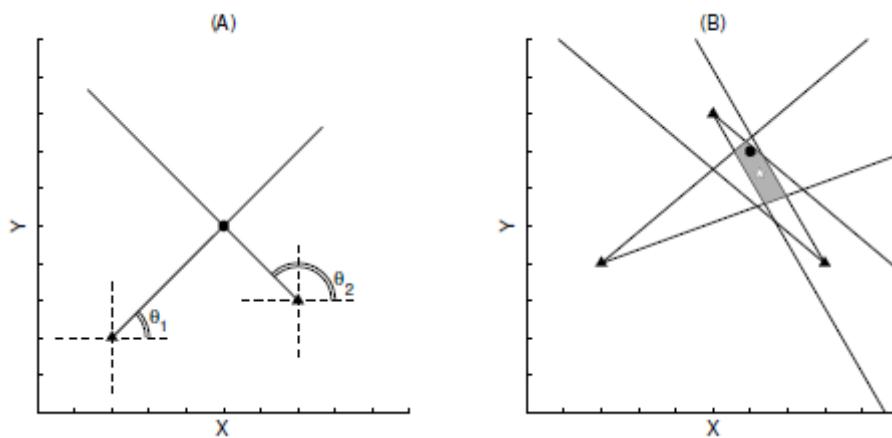


Figura 12 – Multiangulação em condições LOS com resolução angular: (A) nítida as LLOPs interceptam-se em um único ponto, que é a posição verdadeira do nó-alvo; (B) – nítida o círculo negro indica a posição verdadeira, e a estrela branca a posição estimada do nó-alvo (centroide da região de conança). Os triângulos negros indicam as posições verdadeiras dos nós-âncora.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O sinal do nó-alvo é recebido pelos dois nós-âncora com ângulos ϕ_1 e ϕ_2 . As coordenadas verdadeiras dos nós-âncora são (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Em condições de propagação LOS, as coordenadas estimadas do nó-alvo (\hat{x}, \hat{y}) são dadas por:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= [(x_2 \tan \theta_2 - x_1 \tan \theta_1) - (y_2 - y_1)] / (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \\ \hat{y} &= [(x_2 - x_1) \tan \theta_1 \tan \theta_2 + (y_1 \tan \theta_2 - y_2 \tan \theta_1)] / (\tan \theta_2 - \tan \theta_1)\end{aligned}\quad (32)$$

onde x_1, x_2, y_1, y_2 estão em metros e θ_1, θ_2 em radianos. Uma estimativa de posição AOA não é possível se os dois nós-âncora e o nó-alvo forem colineares. Nesse caso, $\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = 0$, e os denominadores de ambos os termos na Eq. (32) são nulos.

Como ilustrado pela Figura 12A, em condições LOS, as LLOPs interceptam-se em um único ponto e a Eq. (32) pode ser usada para cada par de nós-âncora. Porém, mesmo em condições LOS,



a resolução angular nita das medidas de AOA deve ser levada em consideração. Nesse cenário, as LLOPs não se interceptam em um único ponto. Ao invés de linhas, cada medida de AOA dene uma seção angular. A Figura 12B representa essa situação em que a interseção dessas seções angulares produz uma região de conança, cujo centroide é tomado como estimativa da posição do nó-alvo.

Sistemas de localização e navegação baseado em multiangulação, como, o VOR (VHF Omnidirectional Range), assumem condições LOS para operar (Bensky, 2016). De fato, esse método não é utilizável, a menos que haja pelo menos uma componente de visada direta. Em condições NLOS, obstáculos atenuam a componente LOS e geram componentes de múltiplo percurso, efeitos esse que afetam severamente o funcionamento de sistemas de localização baseados em AOA. Nas situações em que a medida de AOA é realizada no *uplink*, reexões em obstáculos mais próximos dos nós-âncora têm um efeito mais nocivo que aqueles próximos ao nó-alvo, pois causam maior espalhamento angular na recepção. Esse cenário é típico de microcélulas de redes celulares em ambientes urbanos, onde as antenas das estações rádio-base (nós-âncora) situam-se tipicamente abaixo da altura média dos obstáculos circunvizinhos (as edificações). Se o modelo proposto em (Panwar; Babu, 2023) for aplicado nessa situação, o valor de AOA em cada nó-âncora será uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0 - 2\pi]$, tornando inviável o uso de posicionamento baseado em AOA (Xhafa *et al.*, 2022).

4 CONCLUSÃO

Este artigo apresentou uma análise abrangente dos fundamentos algébricos e geométricos da rádiolocalização baseada em triangulação, com ênfase nas técnicas de multilateração e multiangulação. A principal contribuição deste estudo consiste na avaliação sistemática, por meio de simulações computacionais realizadas no ambiente MATLAB, do impacto de parâmetros geométricos (especialmente a disposição relativa entre nós-âncora e nó-alvo) sobre a acurácia das estimativas de posição. Os resultados mostraram que a geometria do arranjo exerce inuênciam determinante no desempenho da localização, sendo observada maior precisão quando o nó-alvo se encontra dentro do polígono convexo formado pelos nós-âncora. Além disso, vericou-se que a degradação de desempenho é acentuada em cenários NLOS e em regiões com baixa densidade de estações de referência. O trabalho também evidenciou a importância de se adotar estimativas iniciais adequadas em métodos iterativos de solução, onde a utilização do centroide do polígono formado pelos nós-âncora mostrou-se uma escolha ideal para inicialização.

Como perspectivas futuras, recomenda-se estender a análise para ambientes tridimensionais e avaliar o desempenho dos métodos sob diferentes modelos estatísticos de propagação e



níveis de ruído. Além disso, os resultados obtidos podem ser aplicados ao projeto e à otimização de sistemas de posicionamento em redes sem fio, redes de sensores e infraestruturas 5G, contribuindo para o aprimoramento de técnicas de geolocalização em contextos urbanos e industriais complexos.

5 REFERÊNCIAS

- 3GPP. *TR 25.847, v4.0.0 (2001-03)*: 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Radio Access Network; UE positioning enhancements (Release 4). [S. l.]: 3GPP, 2001.
- BENSKY, A. *Wireless Positioning Technologies and Applications*. 2. ed. Estados Unidos: Artech House, 2016. p. 33-44.
- BUEHRER, R. M.; VENKATESH, S. Fundamentals of Time-of-Arrival-Based Position Location. In: ZEKAVAT, S. A.; BUEHRER, R. M. (ed.). *Handbook of Position Location: Theory, Practice, and Advances*. 1. ed. Canadá: John Wiley and Sons, 2011. cap. 6, p. 187-189, 196.
- CAFFERY, J. J. A New Approach to the Geometry of TOA Location. In: IEEE VEHICULAR TECHNOLOGY CONFERENCE, 52., 2000, Boston. *Proceedings* [...]. Boston: IEEE, 2000. p. 1943-1949.
- CAMPOS, R. S. Evolution of Positioning Techniques in Cellular Networks, from 2G to 4G. *Wireless Communications and Mobile Computing*, London, v. 2017, p. 1-17, jan. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2017/4615215>. Acesso em: 22 out. 2025.
- CAMPOS, R. S.; LOVISOLI, L. A Fast Database Correlation Algorithm for Localization of Wireless Network Mobile Nodes using Coverage Prediction and Round Trip Delay. In: IEEE VEHICULAR TECHNOLOGY CONFERENCE, 69., 2009, Barcelona. *Proceedings* [...]. Barcelona: IEEE, 2009.
- FAN, R.; DU, X. NLOS error mitigation using weighted least squares and kalman filter in UWB positioning. *IEEE Access*, [s. l.], v. 10, p. 51234-51244, 2022. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9772370>. Acesso em: 22 out. 2025.
- GUSTAFSSON, F.; GUNNARSSON, F. Positioning using time-difference of arrival measurements. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, 2003, Hong Kong. *Proceedings* [...]. Hong Kong: IEEE, 2003. v. 6, p. 553-556.
- HATA, M. Empirical Formula for Propagation Loss in Land Mobile Radio Services. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, New York, v. 29, n. 3, p. 317-325, ago. 1980.
- KOROGODIN, I. V.; DNEPROV, V. V.; MIKHAYLOVA, O. K. Triangulation positioning by means of wi-fi signals in indoor conditions. In: PHOTONICS AND ELECTROMAGNETICS RESEARCH SYMPOSIUM - SPRING (PIERS-SPRING), 2019, Rome. *Proceedings* [...]. Rome: IEEE, 2019. p. 2339-2345.
- KRISTALINA, P. et al. A wireless sensor networks localization using geometric triangulation scheme for object tracking in urban search and rescue application. In: INTERNATIONAL CONFERENCE



ON SCIENCE IN INFORMATION TECHNOLOGY (ICSITECH), 2., 2016, Balikpapan. *Proceedings [...]*.
Balikpapan: IEEE, 2016. p. 254-259.

LEE, J. H.; BUEHRER, R. M. Fundamentals of Received Signal Strength-Based Position Location.
In: ZEKAVAT, S. A.; BUEHRER, R. M. (ed.). Handbook of Position Location: Theory, Practice, and Advances. 1. ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2011. cap. 11, p. 364-366.

PANWAR, K.; BABU, P. *Majorization-Minimization based Hybrid Localization Method for High Precision Localization in Wireless Sensor Networks*. Ithaca, NY: arXiv, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2205.03881>. Acesso em: 22 out. 2025.

PAZIEWSKI, J. et al. Recent advances in ubiquitous positioning systems for mobility applications.
Measurement Science and Technology, Bristol, v. 32, n. 9, p. 090201, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ac0186>. Acesso em: 22 out. 2025.

SO, H. C. Source Localization: Algorithms and Analysis. *In: ZEKAVAT, S. A.; BUEHRER, R. M. (ed.). Handbook of Position Location: Theory, Practice, and Advances.* 1. ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2011. cap. 2, p. 34-35.

STÜBER, G. L. *Principles of Mobile Communication*. 4. ed. Cham: Springer, 2017.

VALLET, J. et al. 10th Workshop on Position, Navigation and Communication. *In: IEEE VEHICULAR TECHNOLOGY CONFERENCE*, 52., 2013, Dresden. *Proceedings [...]*. Dresden: IEEE, 2013. p. 1-6.

XHAFA, A. et al. Evaluation of 5G positioning performance based on UTDoA, AoA and base-station selective exclusion. *Sensors*, Basel, v. 22, n. 1, p. 101, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/s22010101>. Acesso em: 22 out. 2025.

YANG, J.; CHEN, Y.; MARTIN, R. P. On the Performance of Wireless Indoor Localization using Received Signal Strength. *In: ZEKAVAT, S. A.; BUEHRER, R. M. (ed.). Handbook of Position Location: Theory, Practice, and Advances.* 1. ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2011. cap. 12, p. 399-400.

YANG, M. et al. Research on the eloran/gnss combined positioning algorithm and altitude optimization. *Remote Sensing*, Basel, v. 17, n. 4, p. 633, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/rs17040633>. Acesso em: 22 out. 2025.

YANGSEOK, J.; HEUNGRYEOL, Y.; CHUNGYONG, L. Calibration of nlos error for positioning systems.
In: IEEE VEHICULAR TECHNOLOGY CONFERENCE (VTC SPRING), 53., 2001, Rhodes. *Proceedings [...]*. Rhodes: IEEE, 2001. p. 2605-2608.



APÊNDICE – INFORMAÇÕES SOBRE O ARTIGO

CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Resumo/Abstract/Resumen: Rafael Campos; **Introdução ou Considerações iniciais:** Rafael Campos; **Referencial teórico:** Rafael Campos; **Metodologia:** Rafael Campos; **Análise de dados:** Rafael Campos; **Discussão dos resultados:** Rafael Campos; **Conclusão ou Considerações finais:** Rafael Campos; **Referências:** Rafael Campos; **Revisão do manuscrito:** Rafael Campos; **Aprovação da versão final publicada:** Rafael Campos.

CRedit - Taxonomia de Papéis de Colaborador - <https://credit.niso.org/>

Todos os autores contribuíram igualmente em todas as fases da produção do artigo.

As opiniões e informações expressas neste manuscrito, no que diz respeito tanto à linguagem quanto ao conteúdo, não refletem necessariamente a opinião da **Tecnia – Revista de Educação, Ciência e Tecnologia do IFG**, de seus editores e do Instituto Federal de Goiás. As opiniões são de responsabilidade exclusiva dos respectivos autores.

HISTÓRICO EDITORIAL

Submetido: 13 de maio de 2025.



Aprovado: 12 de novembro de 2025.

Publicado: 30 de janeiro de 2026.

COMO CITAR O ARTIGO - ABNT

CAMPOS, Rafael Saraiva. Fundamentos da radiolocalização por triangulação. **Tecnia – Revista de Educação, Ciência e Tecnologia do IFG**, Goiânia, v. 11, n. 1, p. 95-119, 2026.

PROCESSO DE AVALIAÇÃO

Revisão por pares duplo-cega (Double blind peer review).

AVALIADORES

Dois pareceristas ad hoc avaliaram este artigo e não autorizaram a divulgação dos seus nomes.

EDITOR(A) SEÇÃO

Prof. Ma. Geisa Pires da Silva

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG)