

---

# Sobre a implementação numérica da Fórmula de Chézy-Manning

*On the Numerical Implementation of the Chézy-Manning Formula's*  
*Acerca de implementación numérica de la Fórmula de Chézy-Manning*

Jordana Fernandes Costa (IFG)

Diogo Gonçalves Dias (IFG)

## Resumo

*Os canais hidráulicos, que possuem escoamento uniforme e livre, têm sua vazão calculada a partir da Fórmula de Chézy-Manning. Neste trabalho, essa fórmula foi desenvolvida para as seções usuais, como a retangular, triangular, trapezoidal e semicircular, e também para as seções não usuais, como as poligonais, que resultaram em equações polinomiais. Para a realização dessas equações, foram utilizados os métodos numéricos, entre os quais foi escolhido o método de Newton-Raphson, por ter convergência quadrática. Para obtermos as raízes de cada polinômio, a altura ou o apótema de cada seção, foi implementado esse método nas equações polinomiais, via programa computacional Scilab. Através desse código, também é demonstrada a aproximação da vazão de uma seção poligonal com  $N$  lados para a vazão de uma seção circular. Com isso, foi mostrado analiticamente que o limite da vazão de uma seção poligonal com  $N$  lados, em que  $N$  tende ao infinito, é igual à equação da vazão da seção circular. Dessa forma, percebe-se que, em uma seção poligonal, mantendo a abertura fixada, quanto mais aumenta o número de lados, mais sua vazão irá tender à vazão da seção circular.*

**Palavras-Chave:** Projeto. Fórmula. Chézy-Manning. Vazão. Seção circular.

## Abstract

*Hydraulic channels, which have uniform and free flow, have their flow calculated from the formula of Chézy-Manning. In this work, this formula has been developed for the usual sections, such as rectangular, triangular, trapezoidal and semi-circular, and also the unusual sections, such as polygonal, which resulted in polynomial equations. To perform these equations, numerical methods were used in which the Newton-Raphson method has been chosen because it has quadratic convergence. To get the roots of each polynomial, namely the height or the apothem, this method was implemented in these polynomial equations, via computer software Scilab. Also,*

*through this code, it is demonstrated the approaching between the flow of a polygon section with  $N$  sides with the flow of a circular section. With this has been shown analytically that the flow limit of a polygonal section with  $N$  sides, where  $N$  goes to infinity equation is equal to the flow of circular section. Thus, it is clear that in a polygonal section, keeping the opening the same size, the more increases the number of sides, the more its flow will tend to the flow of a circular section.*

**Keywords:** *Project. Formula. Chézy – Manning. Flow rate. Circular section.*

### Resumen

*Los canales hidráulicos, que poseen un flujo uniforme y libre, tienen su flujo calculado a partir de la fórmula de Chézy-Manning. En este trabajo, esa fórmula ha sido desarrollada para las secciones habituales, tales como rectangular, triangular, trapezoidal y semicircular, y también para las secciones raras, tales como poligonal, que se tradujo en ecuaciones polinómicas. Para llevar a cabo esas ecuaciones, se utilizaron métodos numéricos en la que el método de Newton-Raphson ha sido elegido por presentar convergencia cuadrática. Para obtener las raíces de cada polinomio, es decir, la altura o la apotema de cada sección se puso en práctica ese método en esas ecuaciones polinómicas, por medio del programa de computación Scilab. Además, con ese código, se muestra la aproximación del flujo de una sección poligonal de  $N$  lados al flujo de una sección circular. Con esto se ha demostrado analíticamente que el límite de flujo de una sección poligonal de  $N$  lados, donde  $N$  va al infinito es igual a la ecuación del flujo de la sección circular. Por lo tanto, es evidente que en una sección poligonal, manteniendo el conjunto de apertura fijada, cuanto más aumenta el número de lados, más el flujo tenderá al flujo de la sección circular.*

**Palabras clave:** *Proyecto. Fórmula Chézy – Manning. Deflujo. Sección circular.*

## Introdução

O canal hidráulico é uma vala artificial que pode ou não estar revestida de material que lhe dê sustentação e que se destina a passagem da água (VIEIRA, 1985). O regime do escoamento é a forma como os fluidos se comportam em diversas variáveis. As duas principais formas de escoamento são os livres e os forçados. No escoamento em condutos forçados, as condições de contorno são sempre bem definidas, como em bombas de sucção e tubos de recalque. Já o escoamento livre, ou escoamento em canais abertos, é caracterizado pela presença de uma superfície em contato com a atmosfera, submetida, portanto, à pressão atmosférica, como em canais fluviais.

Os canais são projetados usualmente em uma das quatro formas geométricas seguintes: retangular, trapezoidal, triangular e semicircular, sendo a forma trapezoidal a mais utilizada. No caso de seções simples e regulares, os elementos hidráulicos são expressos e relacionados entre si,

matematicamente, em função da altura de água no canal. No entanto, no caso de seções mais complexas e não uniformes, como são os canais naturais, não há uma equação simples que possa correlacioná-los, uma vez que são variáveis.

Em canais abertos ou de condutos livres, durante o escoamento livre e uniforme, a profundidade da água, a área molhada da seção transversal e a velocidade são constantes ao longo do conduto. Nestas condições a linha energética total, a superfície do líquido e o fundo do canal possuem a mesma declividade (BAPTISTA; LARA, 2014).

Na Figura 1 é demonstrado um exemplo de canal que possui escoamento livre e uniforme, em uma seção quadrada. Com isso, a Equação 1 é o resultado da projeção das forças em um eixo horizontal correspondente ao escoamento:

$$F_1 - F_2 + W \sin \theta - F_f = 0, \quad (1)$$

em que  $F_1$  e  $F_2$  são as forças aplicadas na lateral do canal,  $W$  é o peso,  $\theta$  é o ângulo de inclinação do canal e  $F_f$  é a força de resistência ao escoamento.

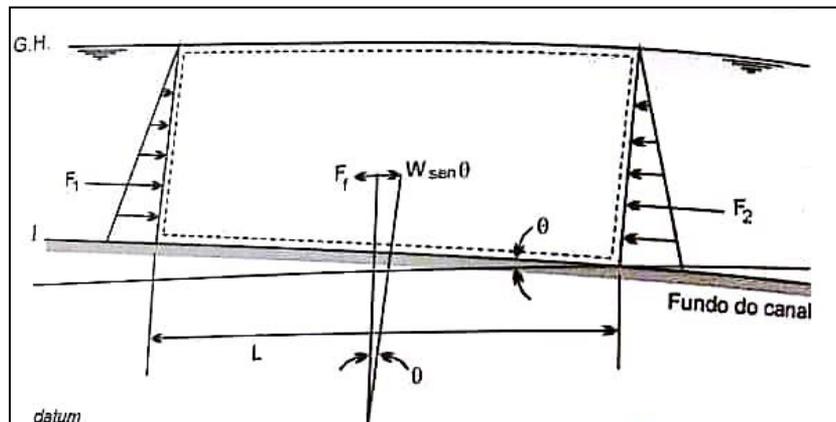


Figura 1 – Forças atuantes no escoamento uniforme.

Fonte: Baptista e Lara (2014).

Supondo que a profundidade seja constante e considerando a validade hidrostática das pressões, que ocorre quando inexistem componentes de

aceleração no sentido longitudinal, pode-se escrever que  $F_1 = F_2$ . E também, admitindo tratar-se de canais com declividades reduzidas, pode-se também escrever que  $\sin \theta \cong \tan \theta \cong I$ , em que  $I$  é a declividade. Resultando:

$$WI - F_f = 0 \tag{2}$$

Assim, a equação da velocidade de escoamento uniforme (Equação 3) é gerada, a partir do desenvolvimento da Equação 2:

$$U = \frac{1}{n} R_h^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Combinando esta expressão com a equação da continuidade ( $Q = UA$ ), chega-se à Fórmula de Chézy-Manning (Equação 4):

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

sendo:

TABELA 1

**Fórmula de Chézy-Manning**

Q	Vazão, em m <sup>3</sup> /s
A	Área, em m <sup>2</sup>
R <sub>h</sub>	Raio hidráulico em m
I	Declividade, em m/m
n	Coefficiente de rugosidade de Manning

Assim, o objetivo deste trabalho é demonstrar analiticamente que a vazão de uma seção poligonal com  $N$  lados tende a vazão de uma seção circular. Com o código computacional, em que a vazão é calculada a partir dos métodos numéricos, é possível demonstrar a aproximação dessa vazão,

que é provado a partir do cálculo do limite de uma seção poligonal com  $N$  lados, em que  $N$  tende ao infinito, é igual à vazão da seção circular.

## Desenvolvimento

### Bases teóricas

Para algumas equações existem fórmulas explícitas que dão as raízes em função dos coeficientes. Mas em algumas equações é praticamente impossível se achar os zeros exatamente. Dessa forma, procuram-se apenas aproximações para esses zeros com alguns métodos (RUGGIERO; LOPES, 1996).

A ideia central desses métodos é partir de uma aproximação inicial para a raiz e em seguida refinar essa aproximação através de um processo iterativo. Os métodos contam de duas fases: a localização das raízes e o refinamento. Os principais métodos são: o da bissecção, o da posição falsa, o do ponto fixo (MPF), o de Newton-Raphson e o da secante (FRANCO, 2007).

### Método da Bissecção

O método da bissecção consiste em reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida:  $(b - a) < \xi$ , utilizando a sucessiva divisão de  $[a, b]$  ao meio. Dessa forma, a raiz aproximada é simplesmente a média aritmética entre  $a$  e  $b$ .

### Método da Posição Falsa

O método da posição falsa utiliza a média aritmética ponderada entre  $a$  e  $b$  com pesos  $|f(b)|$  e  $|f(a)|$  respectivamente:

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (5)$$

visto que  $|f(a)|$  e  $|f(b)|$  possuem sinais opostos.

### Método do Ponto Fixo (MPF)

O método do ponto fixo (MPF) consiste em transformar a função contínua em uma equação equivalente e a partir de uma aproximação inicial

gerar a sequência de aproximações para a raiz. Uma função equivalente que satisfaz essa condição é chamada de função de iteração para a equação  $f(x) = 0$ .

### Método de Newton

O método de Newton, para tentar garantir e acelerar a convergência do MPF, escolhe para a função de iteração ( $\varphi(x)$ ) a função derivada ( $f'(x)$ ) da função contínua ( $f(x)$ ). Assim, a função de iteração será:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (6)$$

tal que  $\varphi'(\xi) = 0$ . (BOYER, 1968)

### Método da Secante

O método da secante é uma aproximação para o método de Newton, pois ocorre a substituição da derivada  $f'(x_k)$  pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \quad (7)$$

Nesse caso, a função de iteração resulta:

$$\varphi(x_k) = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \quad (8)$$

## Decisões Metodológicas

A Fórmula de Chézy-Manning (Equação 4) é bastante utilizada em cálculos hidráulicos relativos a canais naturais e artificiais. Essa fórmula pode ser demonstrada em diversas seções e com o seu desenvolvimento para cada uma, utilizando a área molhada e o raio hidráulico, como demonstrado a seguir para a seção retangular.

$$A = Bh$$

$$R_h = \frac{Bh}{B + 2h}$$

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$Q = \frac{1}{n} Bh \frac{(Bh)^{\frac{2}{3}}}{(B + 2h)^{\frac{2}{3}}} I^{\frac{1}{2}}$$

$$Q^3 n^3 = (Bh)^3 \frac{(Bh)^2}{(B + 2h)^2} I^{\frac{3}{2}}$$

$$Q^3 n^3 (B^2 + 4Bh + 4h^2) = (Bh)^5 I^{\frac{3}{2}}$$

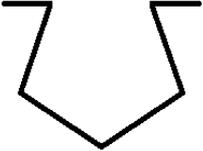
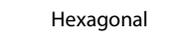
$$\frac{B^5 I^{\frac{3}{2}}}{n^3} h^5 - 4Q^3 h^2 - 4Q^3 Bh - Q^3 B^2 = 0 \quad (9)$$

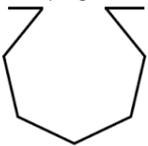
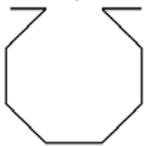
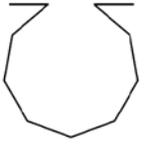
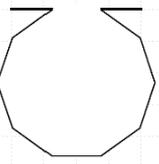
Desse modo, percebe-se que, a partir desse desenvolvimento, chega-se a um polinômio em função da altura. Com isso, a Equação 4 foi desenvolvida para dezesseis seções diferentes de canais hidráulicos, que resultaram em polinômios em função da altura ou do apótema de água no canal, como é demonstrado na Tabela 2.

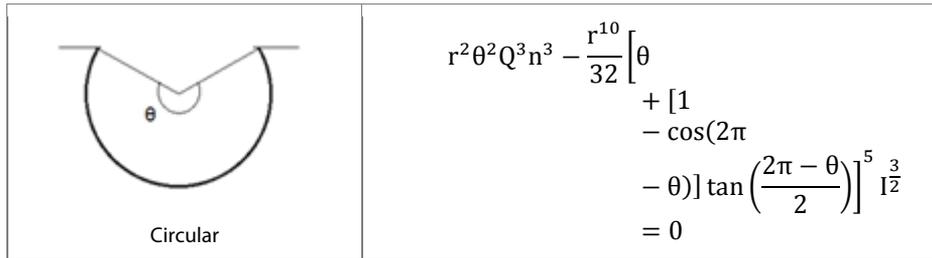
TABELA 2

Seções de canais hidráulicos

Seção	Polinômios
<p>Quadrada</p> 	$I^{\frac{3}{2}} h^8 - 9Q^3 n^3 = 0$
<p>Retangular</p>	$\frac{B^5 I^{\frac{3}{2}}}{n^3} h^5 - 4Q^3 h^2 - 4Q^3 Bh - Q^3 B^2 = 0$

	
Triangular com constante Z 	$Z^5 I^{\frac{3}{2}} h^8 - 4Q^3 n^3 Z^2 - 4Q^3 n^3 = 0$
Triangular com ângulo interno 	$B^5 I^{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta h^3 - 128Q^3 n^3 = 0$
Trapezoidal com constante Z 	$(B + Zh)^5 I^{\frac{3}{2}} h^5 - 4Q^3 n^3 (1 + Z^2) h^2 - 4Q^3 n^3 B \sqrt{1 + Z^2} h - Q^3 n^3 B^2 = 0$
Trapezoidal com Ângulos Externos Iguais 	$(B + b)^5 I^{\frac{3}{2}} \cos^2 \theta h^5 - 32Q^3 n^3 [B + b(\cos \theta - 1)]^2 = 0$
Trapezoidal com Ângulos Externos Diferentes 	$(B + b)^5 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 I^{\frac{3}{2}} h^5 - 32Q^3 n^3 (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)^2 h^2 - 64Q^3 n^3 b \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) h - 32Q^3 n^3 b^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 = 0$
Parabólica 	$32B^7 I^{\frac{3}{2}} h^5 - 1728Q^3 n^3 h^4 - 1296Q^3 n^3 B^2 h^2 - 243Q^3 n^3 B^4 = 0$
Pentagonal 	$3125L^3 I^{\frac{3}{2}} a^5 - 512Q^3 n^3 = 0$
Hexagonal 	$243L^3 I^{\frac{3}{2}} a^5 - 25Q^3 n^3 = 0$

	
<p>Heptagonal</p> 	$16807L^3I^{\frac{3}{2}}a^5 - 1152Q^3n^3 = 0$
<p>Octogonal</p> 	$1024L^3I^{\frac{3}{2}}a^5 - 49Q^3n^3 = 0$
<p>Eneagonal</p> 	$59049L^3I^{\frac{3}{2}}a^5 - 2048Q^3n^3 = 0$
<p>Decagonal</p> 	$3125L^3I^{\frac{3}{2}}a^5 - 81Q^3n^3 = 0$
<p>Poligonal com N lados</p> 	$2r^2N^2Q^3n^3 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) \right] - \frac{r^{10}}{32} \left\{ N \sin\left(\frac{\theta}{N}\right) + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right\}^5 I^{\frac{3}{2}} = 0$



Assim, para essas equações se aproximarem de zero e obter-se o valor aproximado da altura (h) ou do apótema (a), utilizam-se os métodos numéricos. O método escolhido para ser utilizado nas equações polinomiais das seções de canais abertos com escoamento livre e uniforme foi o método de Newton-Raphson, pois ele possui convergência quadrática, com isso será necessário um menor número de iterações para a aproximação ao erro relativo e possui um esforço computacional menor (FILHO, 2007).

O método de Newton-Raphson foi proposto por Isaac Newton em dois momentos, em 1669 e em 1671, e foi aprimorado para qualquer tipo de função real em 1690 por Joseph Raphson. Porém, muitos outros matemáticos contribuíram para visualizar como o método é utilizado atualmente, como Cauchy, J. Fourier, Kantorovich, Fine e Bennet. Fourier provou que esse método convergia quadraticamente desde que o ponto inicial fosse tomado em uma vizinhança da solução procurada e Cauchy provou que ele se estende para funções de várias variáveis e que pode ser utilizado para provar a existência de raízes de outras equações (MACHADO; ALVES, 2013).

## Análise e discussão

O desenvolvimento por meio da fórmula de Chézy-Manning para diversas seções, como apresentamos neste artigo, poderá contribuir com a implementação de novos algoritmos no auxílio ao cálculo de canais hidráulicos, como coletores de esgotos, galerias de água pluviais, túneis-canais, calhas, canaletas, entre outros muito utilizados na construção civil e em outras áreas. Além disso, a fórmula demonstra a importância da

utilização dos métodos numéricos para a engenharia civil, sendo esse um dos exemplos de sua aplicação.

Para a realização dos cálculos da altura ou do apótema de cada seção utilizada, foi implementado, via programa computacional *Scilab*, o método de Newton-Raphson nas equações polinomiais. Na Tabela 3, é demonstrado como o código foi realizado para as três primeiras seções (quadrada, retangular e triangular utilizando a constante Z) e assim foi realizado para todas as dezesseis seções demonstradas na Tabela 2.

TABELA 3

**Código Scilab**

```
001 I = input ('Qual a seção que deseja utilizar (1-Quadrada, 2-Retangular, 3-Triangular, 4-Triangular
utilizando o ângulo, 5-Trapezoidal utilizando a constante Z, 6-Trapezoidal com ângulos iguais,
7-Trapezoidal com ângulos diferentes, 8-Parabólica, 9-Pentagonal, 10-Hexagonal, 11-
Heptagonal, 12-Octogonal, 13-Eneagonal, 14-Decagonal, 15-Circular, 16-Poligonal com N
lados)?');
002 if I:1 then
003 a = input ('Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: ');
004 D = input ('Entre com o valor da Declividade (m/m): ');
005 Q = input ('Entre com o valor da Vazão (m³/s): ');
006 N = input ('Entre com o número máximo de iterações: ');
007 x0 = input ('Entre com o valor do x inicial (x0): ');
008 delta = 10^(-3);
009 xn = x0;
010 for n=1:N
011 xn1 = xn - (((xn)^8)*((D)^(3/2)))-(9*(Q^3)*(a^3)))/((8*(xn)^7)*((D)^(3/2)))-
(9*(Q^3)*(a^3));
012 if abs((xn1-xn)/xn1) < delta then
013 printf("Valor do lado = %10.7f", abs (xn1))
014 return
015 end
016 xn = xn1;
017 end
018 end
019 if I:2 then
020 B = input ('Entre com o valor da Base(m): ');
021 a = input ('Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: ');
022 D = input ('Entre com o valor da Declividade (m/m): ');
023 Q = input ('Entre com o valor da Vazão (m³/s): ');
024 x0 = input ('Entre com o valor da altura inicial (x0): ');
025 N = input ('Entre com o número máximo de iterações: ');
026 delta = 10^(-3);
027 xn = x0;
028 for n=1:N
029 xn1 = xn - (((xn^5)*((B^5)*(D^(3/2)))/(a^3))-(4*(Q^3)*(xn^2))-(4*(Q^3)*(B)*(xn))-
((Q^3)*(B^2)))/((5*(xn^4)*(B^5)*(D^(3/2)))/(a^3))-(8*(Q^3)*(xn))-(4*(Q^3)*(B)));
030 if abs((xn1-xn)/xn1) < delta then
```

```
031  printf("Valor da altura = %10.7f", xn1)
032  return
033  end
034  xn = xn1;
035  end
036  end
037  if l:3 then
038  Z = input ('Entre com o valor da inclinação do Talude (Z=dimensão
horizontal/dimensão vertical) : ');
039  a = input ('Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: ');
040  D = input ('Entre com o valor da Declividade (m/m): ');
041  Q = input ('Entre com o valor da Vazão (m³/s): ');
042  x0 = input ('Entre com o valor da altura inicial (x0): ');
043  N = input ('Entre com o número máximo de iterações: ');
044  delta = 10^(-3);
045  xn = x0;
046  for n=1:N
047  xn1 = xn - (((Z^5)*(D^(3/2))*(xn^8))-(4*(Q^3)*(a^3)*(Z^2))-
(4*(Q^3)*(a^3)))/(8*((Z^5)*(D^(3/2))*(xn^7)));
048  if abs((xn1-xn)/xn1) < delta then
049  printf("Valor da altura = %10.7f", xn1)
050  return
051  end
052  xn = xn1;
053  end
054  end
```

Dessa maneira, quando o programa é executado, ele pergunta qual é a seção que deseja utilizar e, a partir de sua resposta, questiona sobre as outras variáveis do polinômio apresentado. Em seguida, o programa gera a altura ou o apótema da seção utilizada, como é demonstrado na Figura 2, em que foram usadas a seção retangular e a trapezoidal com ângulos externos diferentes.

```
Qual a seção que deseja utilizar (1-Quadrada, 2-Retangular, 3-Triangular, 4-Triangular utilizando o ângulo,
Entre com o valor da Base(m): 2
Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: 0.017
Entre com o valor da Declividade (m/m): 0.01
Entre com o valor da Vazão (m³/s): 3
Entre com o valor da altura inicial (x0): 0.5
Entre com o número máximo de iterações: 100
Valor da altura = 0.5209139
-->exec('C:\Users\Jordana\Documents\Iniciação Científica\Códigos\Scilab - Algoritmo final.sce', -1)
Qual a seção que deseja utilizar (1-Quadrada, 2-Retangular, 3-Triangular, 4-Triangular utilizando o ângulo,
Entre com o valor da Base Maior(m): 3
Entre com o valor da Base Menor(m): 2
Entre com o valor do primeiro ângulo da base, em radianos: %pi/6
Entre com o valor do segundo ângulo da base, em radianos: %pi/3
Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: 0.025
Entre com o valor da Declividade (m/m): 0.01
Entre com o valor da Vazão (m³/s): 4.7
Entre com o valor da altura inicial (x0): 0.7
Entre com o número máximo de iterações: 100
Valor da altura = 0.8163228
```

Figura 2 – Código Scilab executado

A partir dos dados adquiridos com esse algoritmo, foram produzidos alguns gráficos no programa computacional VCN (Visual Cálculo Numérico), que nos possibilita ver como a variação do valor da base (figuras 3 e 5) ou do valor da vazão (figuras 4 e 6) influencia o valor da altura na seção retangular e trapezoidal regular.

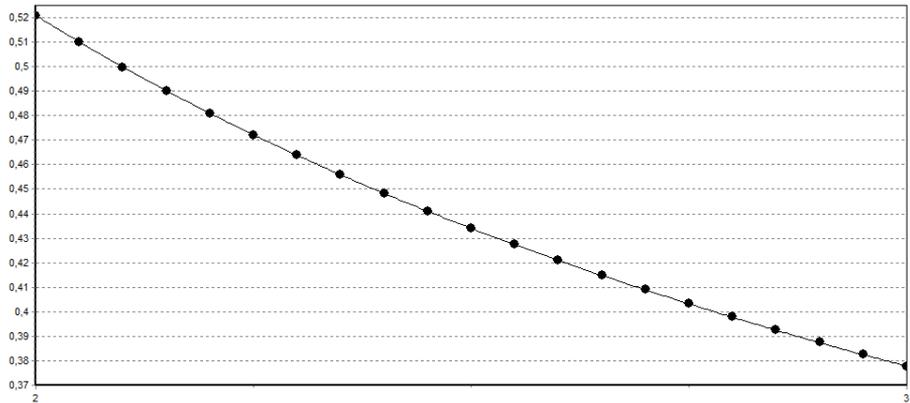


Figura 3 – Gráfico da seção retangular com variação da base de 2m a 3m

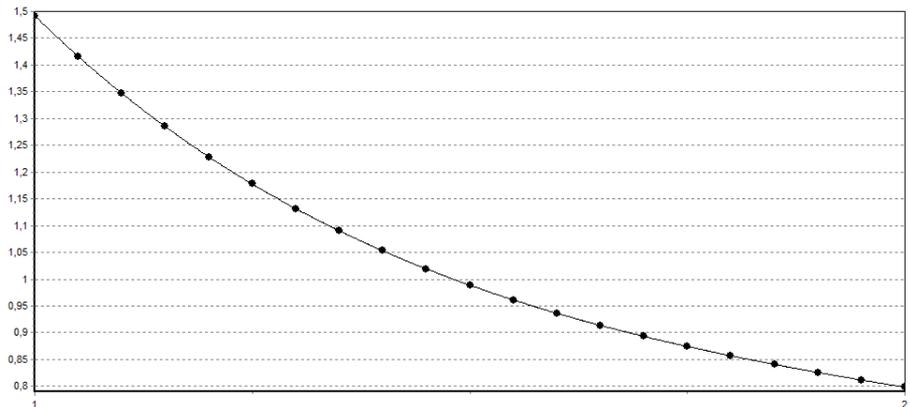


Figura 4 – Gráfico da seção trapezoidal regular com variação da base de 1m a 2m

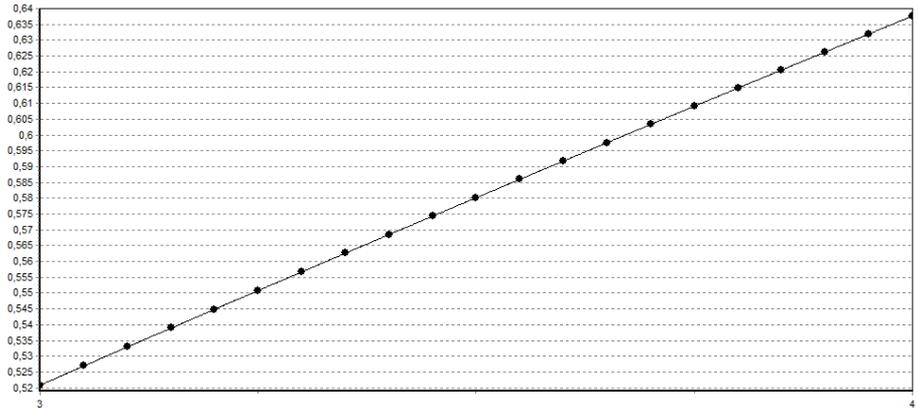


Figura 5 – Gráfico da seção retangular com variação da vazão de 3m³/s a 4m³/s

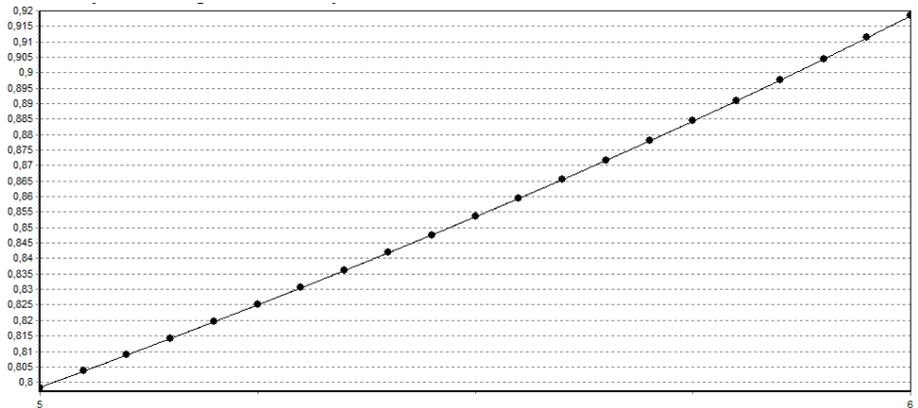


Figura 6 – Gráfico da seção trapezoidal regular com variação da vazão de 5m³/s a 6m³/s

Percebe-se que os gráficos em que ocorre a variação da base são decrescentes, e os gráficos em que ocorre variação da vazão são crescentes.

Também com esse código computacional, podem-se demonstrar como o aumento de lados em uma seção poligonal com N lados influencia a vazão e faz com que esta tenda à mesma vazão da seção circular.

Na Tabela 4, é demonstrado o código computacional que calcula o valor da vazão de uma seção circular e de uma seção poligonal com N lados.

TABELA 4

Código *Scilab* para a seção circular e para seção poligonal com N lados

```
264 if I:15 then
265 r = input ('Entre com o valor do Raio (m): ');
```

```
266 b = input ('Entre com o valor do ângulo, em radianos: ');
267 a = input ('Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: ');
268 D = input ('Entre com o valor da Declividade (m/m): ');
269 x0 = input ('Entre com o valor da Vazão inicial (x0): ');
270 N = input ('Entre com o número máximo de iterações: ');
271 c = cos(2*%pi-b)
272 e = tan((2*%pi-b)/2)
273 delta = 10^(-3);
274 xn = x0;
275 for n=1:N
276 xn1 = xn - (((r^2)*(b^2)*(xn^3)*(a^3))-((r^10)/32)*((b+((1-
c)*(e)))^5)*(D^(3/2))))/((3*(r^2)*(b^2)*(xn^2)*(a^3))-((r^10)/32)*((b+((1-c)*(e)))^5)*(D^(3/2))));
277 if ((xn1-xn)/xn1) < delta then
278 printf("Valor da Vazão (m³/s) = %10.7f", xn1)
279 return
280 end
281 xn = xn1;
282 end
283 end
284 if l:16 then
285 f = input ('Entre com o Número de Lados do Polígono (N): ');
286 r = input ('Entre com o valor do Raio (m): ');
287 b = input ('Entre com o valor do ângulo em radianos: ');
288 a = input ('Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: ');
289 D = input ('Entre com o valor da Declividade (m/m): ');
290 x0 = input ('Entre com o valor da Vazão inicial (x0): ');
291 N = input ('Entre com o número máximo de iterações: ');
292 c = cos(2*%pi-b)
293 e = tan((2*%pi-b)/2)
294 g = sin(b/f)
295 h = cos(b/f)
296 delta = 10^(-3);
297 xn = x0;
298 for n=1:N
299 xn1 = xn - (((2*(r^2)*(f^2)*(xn^3)*(a^3)*(1-h))-((r^10)/32)*(((f*g)+((1-
c)*(e)))^5)*(D^(3/2))))/(((6*(r^2)*(f^2)*(xn^2)*(a^3)*(1-h))-((r^10)/32)*(((f*g)+((1-
c)*(e)))^5)*(D^(3/2))));
300 if ((xn1-xn)/xn1) < delta then
301 printf("Valor da Vazão (m³/s) = %10.7f", xn1)
302 return
303 end
304 xn = xn1;
305 end
306 end
307 end
```

Na Figura 7, o código computacional é compilado e a primeira vazão gerada é a vazão da seção circular. Em seguida, as vazões geradas são da seção poligonal com N lados, em que esse número de lados vai aumentando e as outras variáveis permanecem constantes.

```
-->exec('C:\Users\Jordana\Documents\Iniciação Científica\Códigos\Scilab - Seção Circular final.sce', -1)
Entre com o valor do raio (m): 2
Entre com o valor do ângulo em radianos: 4*pi/3
Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: 0.01
Entre com o valor da declividade (m/m): 0.01
Entre com o valor da vazão inicial (x0): 185
Entre com o número máximo de iterações: 100
Valor da Vazão (m³/s) = 184.96383
-->exec('C:\Users\Jordana\Documents\Iniciação Científica\Códigos\Scilab - Seção Poligonal com N lados.sce', -1)
Entre com o número de lados do polígono (N): 10
Entre com o valor do raio (m): 2
Entre com o valor do ângulo em radianos: 4*pi/3
Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: 0.01
Entre com o valor da declividade (m/m): 0.01
Entre com o valor da vazão inicial (x0): 185
Entre com o número máximo de iterações: 100
Valor da vazão (m³/s) = 185.04084
-->exec('C:\Users\Jordana\Documents\Iniciação Científica\Códigos\Scilab - Seção Poligonal com N lados.sce', -1)
Entre com o número de lados do polígono (N): 10000
Entre com o valor do raio (m): 2
Entre com o valor do ângulo em radianos: 4*pi/3
Entre com o valor do coeficiente de rugosidade de Manning: 0.01
Entre com o valor da declividade (m/m): 0.01
Entre com o valor da vazão inicial (x0): 185
Entre com o número máximo de iterações: 100
Valor da vazão (m³/s) = 184.96383
```

**Figura 7 - Código Scilab executado com valor da vazão da seção circular e seção poligonal com N lados.**

Dessa forma, a partir do aumento de número de lados da seção poligonal com N lados, sua vazão tende cada vez mais à vazão da seção circular. Isso pode ser provado analiticamente a partir da fórmula de Chézy-Manning.

Para a seção circular, a área (Equação 10), o raio hidráulico (Equação 11) e a equação da vazão (Equação 12) serão:

$$A = \frac{r^2}{2} \left[ \theta + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right] \quad (10)$$

$$R_h = \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ \theta + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right] \right\} \frac{1}{r\theta} \quad (11)$$

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$Q_C = \frac{1}{n} \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ \theta + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right] \right\}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{(r\theta)^{\frac{2}{3}}} \quad (12)$$

Para a seção poligonal com N lados, a área (Equação 13), o raio hidráulico (Equação 14) e a equação da vazão (Equação 15) serão:

$$A = \frac{r^2}{2} \left\{ N \sin\left(\frac{\theta}{N}\right) + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right\} \quad (13)$$

$$R_h = \left\{ \frac{r^2}{2} \left\{ N \sin\left(\frac{\theta}{N}\right) + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right\} \right\} \frac{1}{\left\{ N r \sqrt{2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]} \right\}} \quad (14)$$

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{\frac{2}{3}} I_h^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$Q_P = \frac{1}{n} I_h^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{r^2}{2} \left\{ N \sin\left(\frac{\theta}{N}\right) + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right\} \right\}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{\left\{ N r \sqrt{2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]} \right\}^{\frac{2}{3}}} \quad (15)$$

Assim, a partir do limite (Equação 16) da seção poligonal com N lados (Equação 15), em que N tende ao infinito:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{r^2}{2} \left\{ N \sin\left(\frac{\theta}{N}\right) + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right\} \right\}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{\left\{ N r \sqrt{2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]} \right\}^{\frac{2}{3}}} = \quad (16)$$

$$\frac{1}{n} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{r^2}{2} \left\{ N \sin\left(\frac{\theta}{N}\right) + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right\} \right\}^{\frac{5}{3}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ N r \sqrt{2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]} \right\}^{\frac{2}{3}}} =$$

No primeiro limite (Equação 17):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ N \sin\left(\frac{\theta}{N}\right) + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right] \right\}^{\frac{5}{3}}, \quad (17)$$

com a substituição:  $u = \frac{\theta}{N}$ ,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\theta}{u} \sin(u) + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right] \right\}^{\frac{5}{3}}.$$

A partir do limite fundamental (Equação 18):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (18)$$

A resposta desse primeiro limite será:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ N \sin\left(\frac{\theta}{N}\right) + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right] \right\}^{\frac{5}{3}} \\ = \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ \theta + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \right] \right\}^{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Já no segundo limite (Equação 19):

$$\text{Lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ N r \sqrt{2[1 - \cos(\frac{\theta}{N})]} \right\}^{2/3}}, \quad (19)$$

em que, a partir de  $\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$ ,

ocorre o desenvolvimento, chegando a:

$1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , o segundo limite (Equação 19) resultará:

$$\frac{1}{r^{2/3}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ N \sqrt{2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]} \right\}^{2/3}} = \frac{1}{r^{2/3}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ N \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2N}\right)} \right\}^{2/3}} =$$

$$\frac{1}{r^{2/3}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ 2N \sin\left(\frac{\theta}{2N}\right) \right\}^{2/3}}$$

Com a substituição  $u = \frac{\theta}{2N}$ :

$$\frac{1}{r^{2/3}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\left\{ \frac{\theta}{u} \sin(u) \right\}^{2/3}},$$

a partir do limite fundamental (Equação 18), a resposta do segundo limite será:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ Nr \sqrt{2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]} \right\}^{2/3}} = \frac{1}{r^{2/3}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\left\{ \frac{\theta}{u} \sin(u) \right\}^{2/3}} = \frac{1}{r^{2/3}} \frac{1}{\theta^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{(r\theta)^{2/3}}$$

Dessa forma, com esses dois limites calculados, pode-se provar que:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I^{1/2}}{n} \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ N \sin\left(\frac{\theta}{N}\right) \right. \right. \\
 & + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \left. \left. \right\}^{5/3} \frac{1}{\left\{ Nr \sqrt{2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]} \right\}^{2/3}} \\
 & = \frac{I^{1/2}}{n} \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ \theta \right. \right. \\
 & + [1 - \cos(2\pi - \theta)] \tan\left(\frac{2\pi - \theta}{2}\right) \left. \left. \right\}^{5/3} \frac{1}{(r\theta)^{2/3}}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_P = Q_C \tag{20}$$

Assim, é provado analiticamente que, quanto mais cresce o número de lados de uma seção poligonal, mais sua vazão tenderá à vazão da seção circular.

### Considerações finais

Dessa forma, conclui-se que neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo que calcula a altura ou o apótema de diferentes seções de canais hidráulicos, incluindo os que não são usuais, como os poligonais, com uma implementação numérica do método de Newton-Raphson.

Também foi demonstrada a aproximação da vazão de uma seção poligonal com a vazão de uma seção circular, a partir do aumento do número de lados desse polígono, através do algoritmo, via programa

computacional *Scilab*. Assim sendo, prova-se analiticamente que o limite de uma seção poligonal com N lados, em que N tende ao infinito, resulta na equação da vazão de uma seção circular.

## Agradecimentos

Agradeço ao CNPq e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás/Câmpus Aparecida de Goiânia pela oportunidade e pelo incentivo à pesquisa.

## Referências

- BAPTISTA, M.; LARA, M. *Fundamentos da engenharia hidráulica*. 3.. BELO HORIZONTE: ED. UFMG, 2014.
- BOYER, C. B. *A History of Mathematics*. Nova York: Wiley International Edition, 1968.
- FILHO, F. F. C. *Algoritmos numéricos*. 2.ed. Belo Horizonte: LTC, 2007.
- FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. São Paulo: Pearson Education, 2007.
- MACHADO, I. A.; ALVES, R. R. Método de Newton. *Revista Eletrônica de Educação da Faculdade Araguaia*, v. 4, n. 4, p. 30-45, 2013.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2.ed. São Paulo: Pearson – Makron Books, 1996.
- VIEIRA, A. *Iniciação à navegação marítima*. Lisboa: Editorial Presença, 1985.